# EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

**1.** *Comprueba, mediante derivación, si las siguientes funciones designadas por* F(x) *son primitivas, o no, de las correspondientes designadas por* f(x):

*a)* $F(x) = \text{sen } 2x$; $\quad f(x) = \cos 2x$

*b)* $F(x) = \ln (x - 5)$; $\quad f(x) = \dfrac{1}{x-5}$

*c)* $F(x) = (2x + 3)^2$; $\quad f(x) = 2(2x + 3)$

**Solución**

a) No, ya que:
$$F'(x) = \cos 2x \cdot 2 \neq \cos 2x$$

b) Sí, ya que:
$$F'(x) = \frac{1}{x-5} = f(x)$$

c) No, ya que:
$$F'(x) = 2(2x + 3) \cdot 2 \neq 2(2x + 3)$$

**2.** *Calcula las siguientes integrales por el método de sustitución o cambio de variable:*

*a)* $\displaystyle\int \frac{dx}{3 + 2x}$ $\qquad$ *c)* $\displaystyle\int e^{\text{sen } x} \cos x \, dx$

*b)* $\displaystyle\int \frac{x dx}{2 - x^2}$ $\qquad$ *d)* $\displaystyle\int \frac{x}{1 + x^4} dx$

**Solución**

a) Hacemos:
$$3 + 2x = t; \quad 2dx = dt$$
$$\int \frac{dx}{3+2x} = \int \frac{\frac{dt}{2}}{t} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln |t| + C =$$
$$= \frac{1}{2} \ln |3 + 2x| + C$$

b) Hacemos:
$$2 - x^2 = t; \quad -2xdx = dt; \quad xdx = -\frac{dt}{2}$$
$$\int \frac{xdx}{2 - x^2} = \int \frac{\frac{-dt}{2}}{t} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} =$$
$$= -\frac{1}{2} \ln |t| + C = -\frac{1}{2} \ln |2 - x^2| + C$$

c) Hacemos:
$$\text{sen } x = t; \quad \cos x \, dx = dt$$
$$\int e^{\text{sen } x} \cos x \, dx = \int e^t dt = e^t + C = e^{\text{sen } x} + C$$

d) Hacemos:
$$x^2 = t; \quad 2xdx = dt; \quad xdx = \frac{dt}{2}$$
$$\int \frac{x}{1 + x^4} dx = \int \frac{\frac{dt}{2}}{1 + t^2} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} =$$
$$= \frac{1}{2} \text{arc tg } t + C = \frac{1}{2} \text{arc tg } x^2 + C$$

**3.** *Calcula las siguientes integrales por el método de integración por partes:*

*a)* $\displaystyle\int x \ln x \, dx$ $\qquad$ *b)* $\displaystyle\int e^x \cos x \, dx$

**Solución**

a) Tomamos:
$$u = \ln x; \quad du = \frac{1}{x}dx$$
$$dv = x\,dx; \quad v = \frac{x^2}{2}$$
$$\int x \ln x \, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx =$$
$$= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2}\int x\,dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$$

b) Tomamos:
$$u = e^x; \quad du = e^x dx$$
$$dv = \cos x\,dx; \quad v = \text{sen } x$$
$$\int e^x \cos x \, dx = e^x \text{sen } x - \int \text{sen } x \, e^x dx = (*)$$

Volvemos a integrar por partes tomando:
$$u = e^x; \quad du = e^x dx$$
$$dv = \text{sen } x\,dx; \quad v = -\cos x$$
$$(*) = e^x \text{sen } x - [-e^x \cos x - \int (-\cos x) e^x dx] =$$
$$= e^x \text{sen } x + e^x \cos x - \int e^x \cos x \, dx$$

de donde podemos despejar la integral que queremos calcular:
$$2\int e^x \cos x \, dx = e^x(\text{sen } x + \cos x)$$
$$\int e^x \cos x \, dx = \frac{e^x}{2}(\text{sen } x + \cos x) + C$$

**4.** *Calcula* $\displaystyle\int \frac{2x - x^3}{4\sqrt{x}} dx.$

**Solución**

$$\int \frac{2x - x^3}{4\sqrt{x}} dx = \int (\frac{1}{2}\sqrt{x} - \frac{1}{4}x^{5/2}) dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int x^{1/2} dx - \frac{1}{4}\int x^{5/2} dx = \frac{1}{2}\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{1}{4}\frac{x^{7/2}}{7/2} + C =$$
$$= \frac{1}{3}\sqrt{x^3} - \frac{1}{14}\sqrt{x^7} + C$$

**5.** ***(Selectividad. Navarra, 1995).*** *Halla una primitiva de la función* $y = (2x + 1)^3$ *que tome el valor 500 para* $x = \dfrac{7}{2}$.

**Solución**

Para calcular la integral hacemos:

$$2x + 1 = t; \quad 2dx = dt$$

con lo que:

$$\int (2x+1)^3 dx = \int t^3 \frac{dt}{2} = \frac{t^4}{8} + C = \frac{(2x+1)^4}{8} + C$$

con la condición dada:

$$\frac{\left(2 \cdot \frac{7}{2} + 1\right)^4}{8} + C = 500$$

$$C = 500 - 8^3 = -12$$

luego la primitiva pedida es:

$$F(x) = \frac{(2x+1)^4}{8} - 12$$

**6.** *Calcula* $\displaystyle\int \frac{5x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$.

**Solución**

Factorizamos el denominador, obteniendo sus raíces.

Como $x^3 - x^2 - 4x + 4$, se anula para $x = 1$, utilizando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -1 & -4 & 4 \\ 1 & & 1 & 0 & -4 \\ \hline & 1 & 0 & -4 & \boxed{0} \end{array}$$

$x^3 - x^2 - 4x + 4 = (x - 1)(x - 2)(x + 2)$, raíces reales simples.

Descomponemos la función $\dfrac{5x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4}$ en suma de fracciones que tienen por numerador una constante y por denominador cada uno de los factores obtenidos:

$$\frac{5x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x - 2}$$

Determinamos los valores de $A$, $B$ y $C$:

$$5x - 2 = A(x + 2)(x - 2) + B(x - 1)(x - 2) + C(x - 1)(x + 2)$$

para $x = 1$: $\quad 3 = -3A \Rightarrow A = -1$

para $x = -2$: $\quad -12 = 12B \Rightarrow B = -1$

para $x = 2$: $\quad 8 = 4C \Rightarrow C = 2$

Y sustituyendo, integramos:

$$\int \frac{5x - 2}{x^3 - x^2 - 4x + 4} dx =$$

$$= \int \frac{-1}{x - 1} dx + \int \frac{-1}{x + 2} dx + \int \frac{2}{x - 2} dx =$$

$$= -\ln |x - 1| - \ln |x + 2| + 2 \ln |x - 2| + C$$

**7.** *Calcula* $\displaystyle\int \frac{6x^2 - 2x + 3}{x^3 + 3x^2 - 3x + 1}\, dx$.

**Solución**

Factorizamos el denominador, obteniendo sus raíces.

$x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0 \Rightarrow x = -1$ raíz triple, luego $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = (x + 1)^3$, raíz real múltiple.

Descomponemos $\dfrac{6x^2 - 2x + 3}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}$ en suma de fracciones que tienen por numerador una constante y por denominador $x + 1$ elevado a 1, a 2 y a 3 respectivamente:

$$\frac{6x^2 - 2x + 3}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{(x + 1)^3}$$

Determinamos los valores de $A$, $B$ y $C$:

$$6x^2 - 2x + 3 = A(x + 1)^2 + B(x + 1) + C$$

para $x = -1 \Rightarrow C = 11$.

Calculamos la derivada primera:

$$12x - 2 = 2A(x + 1) + B,$$

para $x = -1 \Rightarrow B = -14$.

Volviendo a derivar:

$$12 = 2A \Rightarrow A = 6$$

Y sustituyendo, integramos:

$$\int \frac{6x^2 - 2x + 3}{x^3 + 3x^2 + 3x + 1} dx =$$

$$= \int \frac{6}{x + 1} dx + \int \frac{-14}{(x + 1)^2} dx + \int \frac{11}{(x + 1)^3} dx =$$

$$= 6 \ln |x + 1| + \frac{14}{x + 1} - \frac{11}{2(x + 1)^2} + C$$

Ya que:

$$\int \frac{-14}{(x + 1)^2} dx = -14 \int (x + 1)^{-2} dx = \frac{-14(x + 1)^{-2+1}}{-2 + 1}$$

$$\int \frac{11}{(x + 1)^3} dx = 11 \int (x + 1)^{-3} dx = \frac{11(x + 1)^{-3+1}}{-3 + 1}$$

**8.** *Calcula* $\displaystyle\int \frac{2x^4 + 8x^3 + 8x^2 + x - 12}{x^3 + 4x^2 + 4x}\, dx$.

**Solución**

Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, efectuamos la división del numerador entre el denominador y obtenemos:

$$\frac{2x^4 + 8x^3 + 8x^2 + x - 12}{x^3 + 4x^2 + 4x} = 2x + \frac{x - 12}{x^3 + 4x^2 + 4x}$$

Por tanto:

$$\int \frac{2x^4 + 8x^3 + 8x^2 + x - 12}{x^3 + 4x^2 + 4x} dx =$$

$$= \int 2x dx + \int \frac{x - 12}{x^3 + 4x^2 + 4x} dx$$

Como: $\int 2x dx = 2\int x dx = x^2$, calculamos:

$$\int \frac{x-12}{x^3+4x^2+4x}\,dx$$

Factorizamos el denominador, obteniendo sus raíces. $x^3+4x^2+4x=0$; $x(x^2+4x+4)=0 \Rightarrow x=0$ y $x=-2$ raíz doble, luego $x^3+4x^2+4x=x(x+2)^2$.

Descomponemos $\dfrac{x-12}{x^3+4x^2+4x}$ en suma de fracciones que tienen por numerador una constante y por denominador $x$, $x+2$, $(x+2)^2$:

$$\frac{x-12}{x^3+4x^2+4x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}+\frac{C}{(x+2)^2}$$

Determinamos los valores de $A$, $B$ y $C$:

$$x-12=A(x+2)^2+Bx(x+2)+Cx$$

para $x=0$: $\quad -12=4A \Rightarrow A=-3$

para $x=-2$: $-14=-2C \Rightarrow C=7$

para $x=1$: $\quad -11=-27+3B+7 \Rightarrow B=3$

Y sustituyendo, integramos:

$$\int \frac{x-12}{x^3+4x^2+4x}\,dx=$$

$$=\int\frac{-3}{x}\,dx+\int\frac{3}{x+2}\,dx+\int\frac{7}{(x+2)^2}\,dx=$$

$$=-3\ln|x|+3\ln|x+2|-\frac{7}{x+2}$$

Por tanto:

$$\int\frac{2x^4+8x^3+8x^2+x-12}{x^3+4x^2+4x}\,dx=$$

$$=x^2-3\ln|x|+3\ln|x+2|-\frac{7}{x+2}=$$

$$=\frac{x^3+2x^2-7}{x+2}+3\ln\left|\frac{x+2}{x}\right|+C$$

**9.** *Calcula las siguientes integrales de funciones circulares:*

*a)* $\int \operatorname{sen} x \cos x\,dx$ *c)* $\int 3\cos^2 x \operatorname{sen}^4 x\,dx$

*b)* $\int 4\operatorname{sen} x\cos^4 x\,dx$ *d)* $\int \dfrac{\operatorname{sen}^4 x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x-1}\,dx$

**Solución**

a) Como sen $x$ y cos $x$ están elevados a exponentes impares, podemos hacer el cambio sen $x=t$ o cos $x=t$.

Hacemos el cambio:

$$\operatorname{sen} x=t \Rightarrow \cos x\,dx=dt$$

Sustituyendo:

$$\int \operatorname{sen} x\cos x\,dx=\int t\,dt=\frac{t^2}{2}$$

Y deshaciendo el cambio:

$$\int\operatorname{sen} x\cos x\,dx=\frac{\operatorname{sen}^2 x}{2}+C$$

b) Como el exponente de sen $x$ es impar y el de cos $x$ par, hacemos el cambio:

$$\cos x=t \Rightarrow -\operatorname{sen} x\,dx=dt$$

Sustituyendo:

$$\int 4\operatorname{sen} x\cos^4 x\,dx=-4\int t^4\,dt=-\frac{4t^5}{5}$$

Y deshaciendo el cambio:

$$\int 4\operatorname{sen} x\cos^4 x\,dx=-\frac{4\cos^5 x}{5}+C$$

c) Los exponentes de sen $x$ y cos $x$ son pares.

$$\int 3\cos^2 x\operatorname{sen}^4 x\,dx=$$

$$=3\int(\cos x\operatorname{sen} x)^2\operatorname{sen}^2 x\,dx=[1]$$

Como:

$$\operatorname{sen} x\cos x=\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x \text{ y } \operatorname{sen}^2 x=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

Sustituyendo:

$$[1]=3\int\frac{\operatorname{sen}^2 2x\,(1-\cos 2x)}{8}\,dx=$$

$$=\frac{3}{8}\int\operatorname{sen}^2 2x\,dx-\frac{3}{8}\int\operatorname{sen}^2 2x\cos 2x\,dx$$

Calculamos cada una de estas integrales:

$$\int\operatorname{sen}^2 2x\,dx=\int\frac{1}{2}(1-\cos 4x)\,dx=$$

$$=\int\frac{dx}{2}-\int\frac{\cos 4x}{2}\,dx=\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen} 4x}{8}$$

Para calcular $\int\operatorname{sen}^2 2x\cos 2x\,dx$, hacemos el cambio:

$$\operatorname{sen} 2x=t \Rightarrow 2\cos 2x\,dx=dt$$

Sustituyendo:

$$\int\operatorname{sen}^2 2x\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\int t^2dt=$$

$$=\frac{t^3}{6}=\frac{\operatorname{sen}^3 2x}{6}$$

Por tanto:

$$\int 3\cos^2 x\operatorname{sen}^4 x\,dx=\frac{3}{8}\left(\frac{x}{2}-\frac{\operatorname{sen} 4x}{8}\right)-$$

$$-\frac{3}{8}\left(\frac{\operatorname{sen}^3 2x}{6}\right)+C$$

d) Hacemos el cambio:

$$\operatorname{sen} x=t \Rightarrow \cos x\,dx=dt$$

$$\int\frac{\operatorname{sen}^4 x\cos x}{\operatorname{sen}^2 x-1}\,dx=\int\frac{t^4}{t^2-1}\,dt$$

Como el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, efectuamos la división:

$$\frac{t^4}{t^2-1}=t^2+1+\frac{1}{t^2-1}$$

Por tanto:

$$\int \frac{t^4}{t^2-1}\,dt = \int t^2dt + \int dt + \int \frac{dt}{t^2-1}$$

Calculamos cada una de ellas:

$$\int t^2dt = \frac{t^3}{3};\ \int dt = t$$

Para calcular $\int \frac{dt}{t^2-1}$, factorizamos el denominador calculando sus raíces:

$t^2 - 1 = 0 \Rightarrow t = 1,\ t = -1,$ luego

$$t^2 - 1 = (t-1)(t+1)$$

Descomponemos $\frac{1}{t^2-1}$:

$$\frac{1}{t^2-1} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1}$$

Calculamos $A$ y $B$:

$$1 = A(t+1) + B(t-1)$$

para $t = -1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$

para $t = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2}$

Y sustituyendo:

$$\int \frac{dt}{t^2-1} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t-1} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln|t-1| - \frac{1}{2}\ln|t+1| =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|$$

Por tanto:

$$\int \frac{\operatorname{sen}^4 x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x - 1}\,dx = \frac{t^3}{3} + t + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| =$$

$$= \frac{\operatorname{sen}^3 x}{3} + \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\operatorname{sen} x - 1}{\operatorname{sen} x + 1}\right| + C$$

**10.** *Determina la función* f(x) *tal que:*

*a)* $f(0) = 5,\ f'(x) = 4x \ln(x^2+1)$

*b)* $f(-1) = 4,\ f'(x) = \dfrac{x^2+2}{x^2+2x+4}$

**Solución**

a) Determinamos una primitiva para la función $f'(x)$, $f(x) = \int 4x \ln(x^2+1)\,dx$, por el método de cambio de variable:

$$x^2 + 1 = t;\ 2xdx = dt$$

$$\int 4x \ln(x^2+1)\,dx = 2\int \ln t\,dt = [2]$$

$$u = \ln t;\ du = \frac{dt}{t}$$

$$dv = dt;\ v = t$$

$$[2] = 2\left(t\ln t - \int dt\right) = 2(t\ln t - t)$$

Deshaciendo el cambio:

$f(x) = 2(x^2+1)\ln(x^2+1) - 2(x^2+1) + C$

$f(0) = -2 + C = 5 \Rightarrow C = 7$, luego:

$f(x) = 2(x^2+1)\ln(x^2+1) - 2(x^2+1) + 7$

b) Determinamos una primitiva para la función racional $f'(x)$:

$$f(x) = \int \frac{x^2+2}{x^2+4x+4}\,dx$$

Como el grado del numerador es igual al grado del denominador efectuamos la división:

$$\frac{x^2+2}{x^2+4x+4} = 1 - \frac{4x+2}{x^2+4x+4}$$

Por tanto:

$$\int \frac{x^2+2}{x^2+4x+4}\,dx =$$

$$= \int dx - \int \frac{4x+2}{x^2+4x+4}\,dx \qquad [1]$$

Como:

$$\int dx = x$$

$$\int \frac{4x+2}{x^2+4x+4}\,dx = \int \frac{4x+2}{(x+2)^2}\,dx$$

Hacemos la descomposición:

$$\frac{4x+2}{(x+2)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{(x+2)^2}$$

Calculamos $A$ y $B$:

$$4x + 2 = A(x+2) + B$$

para $x = -2 \Rightarrow B = -6$

para $x = 0;\ 2 = 2A - 6 \Rightarrow A = 4$

Luego:

$$\int \frac{4x+2}{x^2+4x+4}\,dx =$$

$$= \int \frac{4}{x+2}\,dx + \int \frac{-6}{(x+2)^2}\,dx =$$

$$= 4\ln|x+2| + \frac{6}{x+2}$$

Y sustituyendo en [1]:

$$f(x) = x - 4\ln|x+2| - \frac{6}{x+2} + C$$

Para $x = -1$:

$$f(-1) = -1 - 6 + C = 4 \Rightarrow C = 11$$

Por tanto:

$$f(x) = x - 4\ln|x+2| - \frac{6}{x+2} + 11$$