d) $\displaystyle\int_0^2 (x^2 - x)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{8}{3} - 2 = \frac{2}{3}$

que, efectivamente:

$$\int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = -\frac{1}{6} + \frac{5}{6} = \frac{2}{3}$$

e) En este caso, no se verifica la igualdad, ya que:

$$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| = \left|-\frac{1}{6}\right| = \frac{1}{6}$$

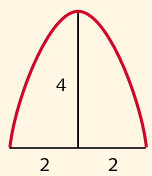
$$\left|\int_1^2 f(x)dx\right| = \left|\frac{5}{6}\right| = \frac{5}{6}$$

$$\text{y} \quad \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1 \neq \frac{2}{3}$$

3. ***(Selectividad. Murcia, 1999).*** *Una chapa de plata tiene la forma y dimensiones que se indican en el dibujo y la curva que la delimita superiormente es la parábola de ecuación:*

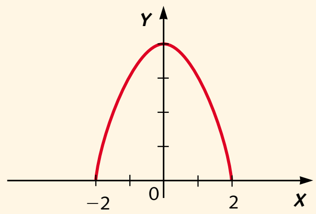
$$y = 4 - x^2$$

Determina el área de la chapa.



Solución

Disponemos los ejes de coordenadas como muestra la figura:



El área de la chapa es el doble de la región limitada por la parábola, la recta $x = 0$ y el eje OX:

$$A = 2\int_0^2 |4 - x^2|\,dx = 2\int_0^2 (4 - x^2)dx =$$

$$= 2\int_0^2 4dx - 2\int_0^2 x^2dx = 8[x]_0^2 - 2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 =$$

$$= 8(2) - 2\left(\frac{8}{3}\right) = \frac{32}{3} \text{ unidades cuadradas.}$$

4. ***(Selectividad. Zaragoza, 1996).*** *Calcula el área encerrada por la función* $f(x) = x^3 - 3x$ *con el eje* OX.

Solución

Calculamos los puntos de corte de la función con el eje OX:

$$x^3 - 3x = 0 \Rightarrow x = -\sqrt{3},\ x = 0,\ x = \sqrt{3}$$

En el intervalo $[-\sqrt{3}, 0]$, la función está por encima del eje OX, ya que $f(-1) > 0$, y en el intervalo $[0, \sqrt{3}]$, la función está por debajo, ya que $f(1) < 0$.

Por tanto, el área buscada es:

$$A = \int_{-\sqrt{3}}^0 (x^3 - 3x)\,dx + \left|\int_0^{\sqrt{3}} (x^3 - 3x)\,dx\right| =$$

$$= 2\int_{-\sqrt{3}}^0 (x^3 - 3x)dx = 2\left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2}\right]_{-\sqrt{3}}^0 =$$

$$= 2\left[0 - \left(\frac{9}{4} - \frac{9}{2}\right)\right] = \frac{9}{2}u^2$$

5. *Utilizando la regla de los trapecios, aproxima el valor de* $\int_2^3 f(x)dx$, *sabiendo que* $f(x)$ *toma los siguientes valores:*

x	2	2,1	2,2	2,3	2,4	2,5
f(x)	4	4,41	4,84	5,29	5,76	6,25

x	2,6	2,7	2,8	2,9	3
f(x)	6,76	7,29	7,84	8,41	9

a) Dividiendo el intervalo [2, 3] en 5 subintervalos.

b) Dividiendo el intervalo [2, 3] en 10 subintervalos.

c) Comprueba que la función $f(x) = x^2$ *satisface los valores de la tabla.*

d) Con la función $f(x) = x^2$, *calcula mediante primitivas el valor del área y compara el resultado con los valores obtenidos en los apartados a) y b).*

Solución

a) Para dividir el intervalo [2, 3] en 5 subintervalos iguales, la amplitud de los mismos ha de ser 0,2. Por tanto, aplicando la regla de los trapecios tenemos:

$$\int_2^3 f(x)dx \simeq 0{,}2\left[\frac{f(2)}{2} + f(2{,}2) + f(2{,}4) + \right.$$

$$\left. + f(2{,}6) + f(2{,}8) + \frac{f(3)}{2}\right]$$

y sustituyendo:

$$\int_2^3 f(x)dx \simeq 0{,}2[2 + 4{,}84 + 5{,}76 + 6{,}76 +$$

$$+ 7{,}84 + 4{,}5] = 0{,}2 \cdot 31{,}7 = 6{,}34$$

b) Para dividir el intervalo [2, 3] en 10 subintervalos iguales, la amplitud de los mismos ha de ser 0,1, y aplicando la regla de los trapecios:

$$\int_2^3 f(x)dx \simeq 0{,}1\left[\frac{f(2)}{2} + f(2{,}1) + f(2{,}2) + \right.$$

$$\left. + f(2{,}3) + \ldots + \frac{f(3)}{2}\right]$$

y sustituyendo:

$$\int_2^3 f(x)dx \simeq 0{,}1[2 + 4{,}41 + 4{,}84 +$$
$$+ 5{,}29 + ... + 4{,}5] = 0{,}1 \cdot 63{,}35 = 6{,}335$$

c) Se comprueba fácilmente que la función $f(x) = x^2$ satisface los valores de la tabla.

d) El área de la región limitada por $f(x) = x^2$, $x = 2$, $x = 3$ y el eje OX vale:

$$\int_2^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 = \frac{27}{3} - \frac{8}{3} = 6{,}\widehat{3}$$

Comparando el valor del área con las aproximaciones obtenidas en los apartados a) y b) concluimos que, conforme aumenta el número de subintervalos, la aproximación mejora. Con 10 subintervalos, la aproximación al área obtenida es buena.

6. ***(Selectividad. Oviedo, 1999).*** *Dada la función:*

$f(x) = ae^{\frac{x}{3}} + \dfrac{1}{x^2}$ *(x ≠ 0), donde* a *es una constante.*

a) Calcula $\int_1^2 f(x)dx$ *en función de* a.

b) Se sabe que F *es una primitiva de* f. *Calcula* a *si* $F(1) = 0$ *y* $F(2) = \dfrac{1}{2}$

Solución

a) $$\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(ae^{\frac{x}{3}} + \frac{1}{x^2}\right) dx =$$
$$= a\int_1^2 e^{\frac{x}{3}}\, dx + \int_1^2 x^{-2}dx = 3a\left[e^{\frac{x}{3}}\right]_1^2 + \left[\frac{x^{-1}}{-1}\right]_1^2 =$$
$$= 3a\left(e^{\frac{2}{3}} - e^{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{2}$$

b) Una primitiva $F(x)$ de $f(x)$ es de la forma:

$$F(x) = 3ae^{\frac{x}{3}} - \frac{1}{x} + k$$

Como $F(1) = 0$ y $F(2) = \dfrac{1}{2}$, sustituyendo obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$3ae^{\frac{1}{3}} - 1 + k = 0; \quad 3ae^{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} + k = \frac{1}{2}$$

que restando a la segunda ecuación la primera:

$$3a\left(e^{\frac{2}{3}} - e^{\frac{1}{3}}\right) = 0 \Rightarrow a = 0$$

7. ***(Selectividad. Castilla y León, 1998).*** *Las pérdidas o ganancias de una empresa siguen una ley* $f(x) = \dfrac{2x - 4}{x + 2}$ *siendo* x *los años de vida de la empresa y* f(x) *las pérdidas o ganancias en millones de euros.*

a) Determina el año en que la empresa deja de tener pérdidas.

b) ¿Pueden ser sus beneficios de 3 millones de euros en algún momento? Justifica la respuesta.

c) ¿A cuánto ascienden las pérdidas o beneficios acumulados en los dos primeros años?

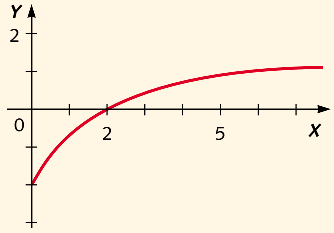
Solución

La función corta al eje OY en $(0, -2)$ y, para valores de $x \geq 0$, al OX en $(2, 0)$.

Determinamos su función derivada primera:

$$f'(x) = \frac{2(x+2) - (2x-4)}{(x+2)^2} = \frac{8}{(x+2)^2}$$

La función es creciente, ya que $f'(x)$ es siempre positivo. Su gráfica para valores positivos de x es:



a) A partir del segundo año la empresa deja de tener pérdidas.

b) Aunque la función $f(x)$ es creciente, como $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-4}{x+2} = 2$, los beneficios nunca pueden superar los 2 millones de euros.

c) Durante los dos primeros años $f(x)$ toma valores negativos, por tanto, para obtener las pérdidas acumuladas en este período hay que calcular el área de la región limitada por $f(x)$, las rectas $x = 0$, $x = 2$ y el eje OX:

$$A = \int_0^2 \left|\frac{2x-4}{x+2}\right| dx = -\int_0^2 \frac{2x-4}{x+2}\, dx =$$
$$= -\int_0^2 \left(2 - \frac{8}{x+2}\right) dx = -2\int_0^2 dx +$$
$$+ 8\int_0^2 \frac{dx}{x+2} = -2[x]_0^2 + 8\,[\ln(x+2)]_0^2 =$$
$$= -4 + 8\ln 2 = 1{,}55$$

Las pérdidas ascienden a 1,55 millones de euros.

8. ***(Selectividad. Burgos, 1996).*** *Una administración pública sabe que el coste (en miles de millones de pesetas) de un determinado servicio en función del tiempo (en años) viene dado por la siguiente función:*

$$f(t) = 6 - 2t + t^2$$

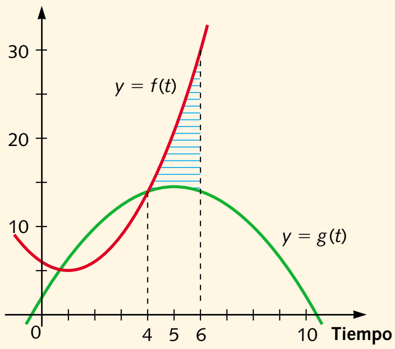
en la que t = 0 *representa el año 1990. En 1994 se aplica una campaña de contención del gasto en ese servicio, como consecuencia se tiene una nueva función:*

$$g(t) = 2 + 5t - \frac{t^2}{2}$$

¿Puede decirse que la campaña ha sido eficaz? Justifícalo. En su caso cuantifica el ahorro producido desde 1994 a 1996.

Solución

La gráfica de la función $f(t)$ es una parábola con las ramas hacia arriba, $a = 1 > 0$, y tiene de vértice el punto (1, 5). La gráfica de $g(t)$ también es una parábola con las ramas hacia abajo, $a = -\dfrac{1}{2}$, y vértice el punto (5, 14,5). Sus gráficas son:



Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones:

$$6 - 2t + t^2 = 2 + 5t - \frac{t^2}{2}$$

operando:

$$3t^2 - 14t + 8 = 0 \Rightarrow t = 4,\ t = \frac{2}{3}$$

Como $t = 4$ corresponde al año 1994 y en este año las funciones $f(t)$ y $g(t)$ toman el mismo valor, se cortan en (4, 14), puede, por tanto, decirse que la campaña ha sido eficaz, ya que se observa en las gráficas cómo disminuye el gasto a partir de 1994 con la función $g(t)$.

Para calcular el ahorro producido desde 1994 a 1996, hay que calcular el área de la región limitada por las funciones $f(t)$, $g(t)$ y las rectas $t = 4$ y $t = 6$ (año 1996).

$$A = \int_4^6 (f(t) - g(t))dt = \int_4^6 \left(\frac{3}{2}t^2 - 7t + 4\right)dt =$$

$$= \frac{3}{2}\int_4^6 t^2 dt - 7\int_4^6 tdt + 4\int_4^6 dt =$$

$$= \frac{3}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_4^6 - 7\left[\frac{t^2}{2}\right]_4^6 + 4[t]_4^6 =$$

$$= \frac{3}{2}\left(\frac{152}{3}\right) - 7\left(\frac{20}{2}\right) + 4(2) = 14$$

desde 1994 a 1996 se han ahorrado catorce mil millones de pesetas.

9. ***(Selectividad. Galicia, 1996).*** *La parábola* $f(x) = a(x^2 - 2x)$, *con* $a > 0$, *delimita con el eje* OX *un recinto de 12 unidades de superficie. Halla el valor de* a.

Solución

La gráfica de la función $f(x)$ es una parábola con las ramas hacia arriba, $a > 0$.

Calculamos los puntos de corte con el eje OX:

$a(x^2 - 2x) = 0$; $\quad x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, \quad x = 2.$
Corta a OX en (0, 0) y (2, 0).

Como el área de la región limitada por la parábola y las rectas $x = 0$ y $x = 2$ vale 12, se verifica:

$$\int_0^2 |a(x^2 - 2x)|\,dx = 12$$

y al ser la función $f(x) < 0$ en el intervalo (0, 2).

$$\int_0^2 |a(x^2 - 2x)|\,dx = -\int_0^2 a(x^2 - 2x)dx =$$

$$= -a\int_0^2 x^2dx + 2a\int_0^2 xdx =$$

$$= -a\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 + 2a\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = -\frac{8a}{3} + 4a = \frac{4a}{3}$$

Luego:

$$\frac{4a}{3} = 12 \Rightarrow a = 9$$

10. ***(Selectividad. Madrid, 1996).*** *A las nueve de la mañana surge un rumor en la ciudad que se difunde a un ritmo de* $f(t) = e^{2t} + 1.000$ *personas/hora. Sabiendo que* t *representa el número de horas transcurridas desde la aparición del rumor, calcula el número de personas que lo habrán oído entre las diez y las doce de la mañana.*

Solución

Como la función $f(t)$ determina la velocidad de difusión del rumor, para determinar el número de personas que lo han oído entre las diez y las doce de la mañana, hay que calcular el área de la región limitada por $f(t)$, las rectas $t = 1$ y $t = 3$ y el eje de abscisas.

La función $f(t)$ es positiva, $f(t) > 0$, en el intervalo (1, 3), luego:

$$A = \int_1^3 |e^{2t} + 1.000|\,dt = \int_1^3 (e^{2t} + 1.000)\,dt =$$

$$= \int_1^3 e^{2t}dt + 1.000\int_1^3 dt = \frac{1}{2}[e^{2t}]_1^3 + 1.000\,[t]_1^3 =$$

$$= \frac{1}{2}(e^6 - e^2) + 2.000 = 2.198$$

Entre las diez y las doce de la mañana el rumor lo han oído 2.198 personas.