EJERCICIOS DE LAS PÁGINAS 48 Y 49, 2º BCTO-CCSS

7. $$\begin{pmatrix} 0.8 & 0.1 & 0.02 \\ 0.7 & 0.14 & 0.08 \\ 0.9 & 0.06 & 0.20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} .3066666 \\ .3066666 \\ .3866666 \end{pmatrix}$$

---

8. $$A \bullet B = \begin{pmatrix} 450 & 800 & 650 \\ 500 & 810 & 620 \\ 200 & 500 & 600 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 85 & 90 & 90 & 95 \\ 28 & 30 & 30 & 35 \\ 70 & 72 & 75 & 80 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 106\,150 & 111\,300 & 113\,250 & 122\,750 \\ 108\,580 & 113\,940 & 115\,800 & 125\,450 \\ 73\,000 & 76\,200 & 78\,000 & 84\,500 \end{pmatrix}$$

$c_{34} = 84500$ gasto de la tercera familia en 1998

---

9. (5x4)$(m$xn)(3x7) Como consecuencia de la propiedad asociativa, para poder hacer A•B, necesariamente m = 4 y por otro lado, para hacer B•C, necesariamente n=3. Además, A•B sería 5xn, es decir, 5x3 y (AB)C sería (5x7) ((5x3) • (3•7))

---

10. $$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3/8 & 7/8 & -1 \\ 3/4 & -3/4 & 1 \\ -5/8 & 9/8 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ por tanto sí son inversas una de otra.

---

11. $$\left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 4 & 1 & 0 \\ -9 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \to F_1 \to \\ \to 9F_1 + 7F_2 \to \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 15 & 9 & 7 \end{array}\right) \begin{matrix} \to 15F_1 - 4F_2 \to \\ \to F_2 \to \end{matrix}$$
$$\left(\begin{array}{cc|cc} 105 & 0 & -21 & -28 \\ 0 & 15 & 9 & 7 \end{array}\right) \begin{matrix} \to \frac{1}{105}F_1 \to \\ \to \frac{1}{15}F_2 \to \end{matrix} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{-21}{105} & \frac{-28}{105} \\ 0 & 1 & \frac{9}{15} & \frac{7}{15} \end{array}\right)$$ Simplificando:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-7}{35} & \frac{-28}{105} \\ \frac{3}{5} & \frac{7}{15} \end{pmatrix}$$

Comprobación: $$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{-7}{35} & \frac{-28}{105} \\ \frac{3}{5} & \frac{7}{15} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

12. $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 5 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -> F_1 + 2F_2 \quad -> \\ -> 2F_2 + F_3 \quad -> \\ -> F_3 \quad -> \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 8 & 5 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 14 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\begin{array}{l} -> 14F_1 - 5F_2 \quad -> \\ -> F_2 \quad -> \\ -> F_3 \quad -> \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 112 & 0 & 0 & 14 & -10 & 23 \\ 0 & 14 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -> F_1/112 \quad -> \\ -> F_2/14 \quad -> \\ -> F_3/(-2) \quad -> \end{array}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{14}{112} & \frac{-10}{112} & \frac{23}{112} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{14} & \frac{1}{14} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{array}\right)$

Simplificando $\begin{pmatrix} \frac{14}{112} & \frac{-10}{112} & \frac{23}{112} \\ 0 & \frac{2}{14} & \frac{1}{14} \\ 0 & 0 & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{5}{56} & \frac{23}{112} \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{1}{14} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Comprobación: $\begin{pmatrix} 8 & 5 & 4 \\ 0 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & -\frac{5}{56} & \frac{23}{112} \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{1}{14} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

---

13. Si intercambio dos filas de la matriz A, en la matriz A^{-1} se intercambiarán las columnas correspondientes. (Observa que para conseguir los "unos" de la diagonal debemos multiplicar la fila "i" por la columna "i", y el resto de multiplicaciones (fila)•(columna)da cero, por lo que si hemos cambiado las filas "i" y "j" en la primera, para volver a obtener la identidad al multiplicar, deberemos intercambiar esas columnas en A^{-1} para obtemer la nueva inversa buscada.

Si multiplicásemos la "i" fila de A por "p" y después multiplicásemos el resultado por A^{-1} tal cual obtendríamos como resultado una matriz parecida a la identidad, pero en la posición (i,i), tendría "p" en lugar de "1". Observa que el único efecto sería multiplicar por "p" los resultados en los que interviene la fila "i", y 0•p=0 y 1•p=p.
Por tanto, la forma de conseguir la identidad de nuevo sería dividir la columna "i" de A^{-1} por "p". De este modo, seguimos obteniendo "ceros" donde había ceros, unos donde había unos y de nuevo "1" en la posición (i,i)

---

14. $A^2 = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix} = A$ luego sí lo es

$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 10 & -10 \\ 10 & 2 & -10 \\ 10 & -10 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 10 & -10 \\ 10 & 2 & -10 \\ 10 & -10 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 130 & -140 \\ -70 & 204 & -150 \\ -60 & 50 & 9 \end{pmatrix} \neq B$ luego NO lo es

$$C^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 9 & 10 \end{pmatrix} \neq C$$ luego NO lo es

---

15. $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x+2y-6z & x-z & 2x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} x+2y-6z = 1 \\ x-z = 0 \\ 2x-y = -1 \end{cases}$ $\quad x = 1, y = 3, z = 1$

Para el apartado b) no existe solución, ya que la matriz A•Y debería tener 3 filas.

---

16. $\begin{cases} 2x+3y = 1 \\ 3x+4y = 2 \end{cases}$ ---forma matricial-- >> $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ --- otra opción----> $\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{array}\right)$

$\begin{cases} 3x-3y+2z = 1 \\ 4x-5y+2z = 1 \\ 5x-6y+4z = 3 \end{cases}$ --- forma matricial —> $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ —— otra opción

——> $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -5 & 2 & 1 \\ 5 & -6 & 4 & 3 \end{array}\right)$

---

17. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$2X - AB = A^2$ ——> Sumo AB en ambos lados ——> $2X = A^2 + AB$ ——> Multiplico ambos miembros por 1/2 ——>

$X = \frac{1}{2}(A^2 + AB)$ y como a mi meda más pereza multiplicar que sumar, aplico la propiedad distributiva y saco A "factor común"

$X = \frac{1}{2}A \bullet (A+B)$

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bullet \left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 15 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{15}{2} & 3 \\ \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}$$

Por curiosidad, veamos que de la primera forma también obtenemos lo mismo:

$$X = \frac{1}{2}[A^2 + AB] = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 7 & 6 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right] =$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 15 & 6 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

---

18. A$=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Nos piden comprobar que A$^T = A^{-1}$ y esto se puede hacer de dos formas:

Primera: Multiplicamos A•A^T y vemos que se obtiene la identidad.

A•A$^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ OK!

Segunda: Calculamos A^{-1} y vemos que efectivamente es A^T (Para esto, podría ser muy útil el ejercicio 13).

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -> F_2 + F_1 -> \\ -> F_3 + F_2 -> \\ -> F_1 + F_3 -> \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -> F_1 -> \\ -> -F_1 + F_2 -> \\ -> F_3 -> \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -> F_1 -> \\ -> F_2 -> \\ -> F_3 - F_2 -> \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -> 2F_1 - F_3 -> \\ -> 2F_2 + F_3 -> \\ -> F_3 - F_2 -> \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Basta ahora dividir cada fila entre 2

b) $(A^T A)^{1998} = (Id)^{1998} = Id$

---

19. Resuelve 2A = AX +B siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

Resolvamos primero "en abstracto"

2A = AX +B ——> Resto B por la dcha en ambos miembros ——> 2A - B= AX ———> Si existe, multiplico por A^{-1}por la izda en ambos miembros ——>> $A^{-1} \bullet (2A - B) = A^{-1}AX$ ———>> $A^{-1} \bullet (2A - B) = X$

Conclusión: Debo calcular la inversa de A y después calcular $A^{-1} \bullet (2A - B)$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{—>} \quad F_1 + F_2 \quad \text{—>} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \text{———>>} A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \left[2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \bullet \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$Solución : X = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$$

Método 2: $X = \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix}$

$$2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \text{———>>} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x & z \\ -x + y & -z + t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 1 & z + 2 \\ -x + y - 3 & -z + t + 1 \end{pmatrix} \text{———>>>} \begin{cases} x - 1 = 2 \\ z + 2 = 0 \\ -x + y - 3 = -2 \\ -z + t + 1 = 2 \end{cases}$$, Solution is :

$\{x = 3, y = 4, z = -2, t = -1\}$

Comprobación:

por un lado $2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

por otro $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$

20. Resuelve $XA + X = 2B$ Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Resuelvo en abstracto: $XA + X = 2B$ ———> Saco X factor común (recuerda que X está multiplicada por Id, aunque No esté escrita) ———> $X(A + Id) = 2B$ ——> Ahora, multiplico ambos miembros por la derecha por la inversa de la matriz (A+Id) ——>>> $X = 2B(A + Id)^{-1}$

Conclusión: Primero calculo A+Id $= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Segundo: Calculo la inversa de la matriz obtenida

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -> F_1 \quad -> \\ -> F_2 \quad -> \\ -> F_1 + 2F_3 \quad -> \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \begin{array}{l} -> F_1 \quad -> \\ -> F_2 \quad -> \\ -> F_2 - F_3 \quad -> \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} -> F_1 + F_3 \quad -> \\ -> F_2 \quad -> \\ -> F_3 - F_2 \quad -> \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{l} -> \frac{1}{2}F_1 \quad -> \\ -> \frac{1}{2}F_2 \quad -> \\ -> F_3 \quad -> \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$(A + Id)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ observa que también se puede expresar como $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

Para terminar, calculo

X= $2B(A + Id)^{-1} = 2\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = 2\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

Solución: $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

21. Determina X tal que $3X + Id = AB - A^2$ Siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Despejo X: $3X = AB - A^2 - Id \longrightarrow\!> X = \frac{1}{3}(AB - A^2 - Id)$

Nota, como no me hace mucha gracia hacer dos multiplicaciones, voy a sacar A factor común para ahorrarme una operación:
$X = \frac{1}{3}[A(B-A) - Id]$

Conclusión: Calculo $B - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Calculo $A \bullet (B-A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

Resto Id : $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ -3 & -3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$

Multiplico por $\frac{1}{3}$: $X = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & -1 & \frac{1}{3} \\ -1 & -1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Observación: Si se calcula AB y A^2,se restan, se resta después la identidad y finalmente se multiplica por 1/3, sería absolutamente correcto.

---

22. $A + B = A \bullet B$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3+x & 1+y \\ 1+z & 2+t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+z & 3y+t \\ x+2z & y+2t \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} 3+x = 3x+z \\ 1+y = 3y+t \\ 1+z = x+2z \\ 2+t = y+2t \end{cases}$, Solution is : $\{y = -1, t = 3, x = 2, z = -1\}$ luego $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Otra forma sería: ”despejar B” : $A + B = A \bullet B \longrightarrow A = A \bullet B - B \longrightarrow A = (A - Id)B \longrightarrow$
$A \bullet (A - Id)^{-1} = B$

Es decir, calculo $A - Id = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculo la inversa de esta:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ —> } -F_1 + 2F_2 \text{ —> } \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \text{ —> } \begin{array}{l} F_1 - F_2 \\ F_1 \end{array} \text{ —> } \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right)$$

Dividiendo la 1ª fila entre 2 : $(A - Id)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Y finalmente: $A \bullet (A - Id)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

Como podeis ver, el método anterior es más corto con matrices 2x2

---

23. $PX + 3I = Q$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -x + 3 & -y \\ 2x + 2z & 2y + 2t + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x + 3 = -2 \\ -y = 3 \\ 2x + 2z = 1 \\ 2y + 2t + 3 = 2 \end{cases}$$, Solution is : $\left\{t = \frac{5}{2}, y = -3, z = -\frac{9}{2}, x = 5\right\}$

Sugerencia: Emplea el otro método para ver que se obtiene lo mismo