Control 2:

Nombre		Grupo	

1.-) Encuentra la matriz X que verifica la ecuación $\mathbf{A \cdot B^T - 2X = A - 2B}$ donde A y B son las matrices siguientes: $A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & -5\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -7 & 5\end{pmatrix}$

2.-) La empresa FITA S.A. debe distribuir tres productos A, B y C entre cuatro de sus filiales sitas en Lugo, Murcia, New York y Orense tal y como se recoge en la matriz "C" (número de unidades de producto). De momento se dispone de dos presupuestos proporcionados por YVALR-E y Rincewind S.A. recogidos en la matriz de presupuestos "P" (expresada en euros).

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} L & M & N & O \end{array} \\ \begin{pmatrix}20 & 15 & 22 & 11\\ 12 & 3 & 18 & 9\\ 5 & 10 & 0 & 6\end{pmatrix} \end{array} = C \qquad \begin{array}{c} \\ Y \\ R \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A & B & C \end{array} \\ \begin{pmatrix}52 & 48 & 19\\ 45 & 55 & 20\end{pmatrix} \end{array} = P$$

a) Indica qué producto de matrices es posible realizar, calcúlalo y explica qué información proporciona la matriz producto. (Llama Z a dicho producto)

b) En particular, ¿qué representa el elemento z_{13}?

c) ¿Qué elemento de la matriz producto nos indica lo que presupuesta Rincewind S.A. para la filial de Murcia?

d) ¿Qué elementos nos permiten comparar qué empresa sale más rentable para nuestra sucursal de New York?

e) Indica qué empresa nos interesa contratar como proveedora para cada filial.

3.-) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 4 & 11\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$ calcula A^{-1} y úsala para resolver la ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix} + X\cdot\begin{pmatrix}1 & 3 & 0\\ 0 & 4 & 11\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3 & 1 & 1\\ 1 & -5 & -1\end{pmatrix}$$

4.-) ELIGE UNO DE LOS SIGUIENTES EJERCICIOS Y RESUÉLVELO

a) Determina las matrices A y B que verifican: $\begin{cases} A-B=C\\ 3A+2B=D\end{cases}$ donde $C=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$; $D=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -7 & 5\end{pmatrix}$

b) Determina paso a paso la matriz X solución de $\mathbf{C(A+X)B + 2C = I}$ donde **A, B y C son matrices con inversa de orden n** e I es la matriz identidad de orden n.

Ejercicio 1:

$A \cdot B^T - 2X = A - 2B \longrightarrow -2X = A - 2B - A \cdot B^T \longrightarrow X = \frac{-1}{2}(A - 2B - A \cdot B^T)$

Calculo $A \cdot B^T$ y 2B $\quad A \cdot B^T = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -7 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 26 \\ 10 & -39 \end{pmatrix}$

$2B = 2\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -14 & 10 \end{pmatrix}$

Calculo $(A - 2B - A \cdot B^T) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -14 & 10 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 & 26 \\ 10 & -39 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} -1 & -21 \\ 6 & 24 \end{pmatrix}$

$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -21 \\ 6 & 24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{21}{2} \\ 3 & 12 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2:

El único producto posible es P·C, dadas las dimensiones de las matrices (2x3)·(3x4). El otro producto no tiene sentido.
La matriz resultante Z es de dimensión (2x4) y nos da información de lo que presupuesta cada una de las dos empresas para cada una de nuestras filiales:

$$Z = P \cdot C = \begin{pmatrix} 52 & 48 & 19 \\ 45 & 55 & 20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 & 15 & 22 & 11 \\ 12 & 3 & 18 & 9 \\ 5 & 10 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1711 & 1114 & 2008 & 1118 \\ 1660 & 1040 & 1980 & 1110 \end{pmatrix}$$

En detalle
$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} L & M & N & O \end{array} \\ \begin{array}{c} Y \\ R \end{array} & \begin{pmatrix} 1711 & 1114 & 2008 & 1118 \\ 1660 & 1040 & 1980 & 1110 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) $z_{13} = 2008$ es lo que presupuesta YVALR-E para nuestra filial en New York
c) Rincewind presupuesta 1040 euros para la filial de Murcia z_{22} .
d) Los elementos que permiten comparar los presupuestos para New York son z_{13} y z_{23}. (2008 y 1980 resp)
e) La empresa más rentable es en todos los casos Rincewind S.A.

Ejercicio 3

Cálculo de A^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 11 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow 4F_3 - F_2 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 11 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow 11F_3 - F_2 \longrightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -12 & 44 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow 4F_1+3F_2 \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 4 & -36 & 132 \\ 0 & -4 & 0 & 0 & -12 & 44 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c} \frac{1}{4}F_1 \\ \frac{-1}{4}F_2 \\ \\ \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -9 & 33 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 4 \end{array}\right) \longrightarrow>>>>> \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -9 & 33 \\ 0 & -3 & 11 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Resolvemos: $B + XA = C \quad \longrightarrow>>$

$$X = (C-B)\cdot A^{-1} = \left[\begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -9 & 33 \\ 0 & -3 & 11 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 26 & -95 \\ 0 & 15 & -55 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4:

$$\left\{\begin{array}{l} A - B = C \\ 3A + 2B = D \end{array}\right. \longrightarrow> 2F_1 + F_2 \longrightarrow> \left\{\begin{array}{ll} A - 4B & = C \\ 5A & = 2C + D \end{array}\right.$$

$$\longrightarrow> A = \frac{1}{5}\left[2\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$$

También puedo encontrar B por reducción:

$$\left\{\begin{array}{l} A - B = C \\ 3A + 2B = D \end{array}\right. \longrightarrow> -3F_1 + F_2 \longrightarrow> \left\{\begin{array}{l} A - 4B = C \\ 5B = -3C + D \end{array}\right.$$

$$\longrightarrow> B = \frac{1}{5}\left[-3\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -7 & 5 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5

C(A+X)B + 2C = I $\longrightarrow>$

Resto 2C en ambos miembros $\longrightarrow>$ C(A+X)B = I – 2C

Multiplico ambos miembros por la izquierda por la inversa de C : C^{-1}C(A+X)B = $C^{-1}\left(\text{I} - 2\text{C}\right) \longrightarrow>$ (A+X)B = $C^{-1}\left(\text{I} - 2\text{C}\right)$

Multiplico ambos miembros por la derecha por la inversa de B : (A+X)BB^{-1} = $C^{-1}\left(\text{I} - 2\text{C}\right)B^{-1} \longrightarrow>$ A+X = $C^{-1}\left(\text{I} - 2\text{C}\right)B^{-1}$

Resto A (o ”sumo $-A$) en ambos miembros: $-A$ +A+X = $-A + C^{-1}\left(\text{I} - 2\text{C}\right)B^{-1} \longrightarrow>$ X = $-A + C^{-1}\left(\text{I} - 2\text{C}\right)B^{-1}$