

## EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. (Selectividad. La Rioja, 1995). Dada la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 2}{2x + 1}$$

- Calcula sus asíntotas.
  - Calcula sus máximos y mínimos.
  - Represéntala gráficamente.
2. (Selectividad. Galicia, 1998). Representa la función  $f(x) = 3x^2 - x^3$  estudiando: puntos de corte con los ejes, crecimiento y decrecimiento, concavidad y convexidad y asíntotas.

3. (Selectividad. Murcia, 1998). Representa gráficamente la curva

$$y = \frac{x}{1 + x^2}$$

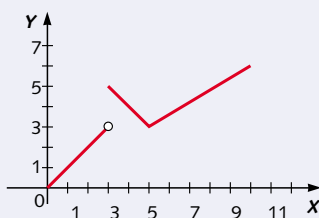
encontrando:

- Dominio, cortes con los ejes y simetrías.
  - Asíntotas y regiones.
4. (Selectividad. La Rioja, 1999). Sea la función:

$$f(x) = \frac{3x^2}{x^2 + 1}$$

- Calcula sus asíntotas.
- Calcula sus extremos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- Represéntala gráficamente.

5. (Selectividad. Murcia, 1995). La gráfica de una función en el intervalo  $[0, 10]$  es la indicada en la figura:



Encuentra:

- Su máximo y mínimo absolutos.
- Puntos en los que la función no es continua.
- Puntos en los que la función no es derivable.

**Nota:** (o) significa que el punto no pertenece a la gráfica.

6. (Selectividad. Madrid, 1995). Un heladero ha comprobado que, a un precio de 50 ptas. la unidad, vende una media de 200 helados diarios. Por cada peseta que aumenta el precio, vende 2 helados menos al día. Si el coste de la unidad es de 40 ptas., ¿a qué precio de venta es máximo el beneficio diario que obtiene el heladero?

7. (Selectividad. Almería, 1995). Dibuja la gráfica de una función con las siguientes propiedades:

- El recorrido de la función es  $[-2, +\infty)$ .
- La función es decreciente en  $(-\infty, -2)$ .
- La función presenta un máximo relativo en el punto  $x = 2$ , y el valor de la función en dicho punto es 4.
- La función es discontinua en  $x = 0$ .
- En el punto  $x = 5$  la función es continua, pero no derivable.

8. (Selectividad. Castilla y León, 1999). Considera la función  $f(x) = \frac{2x + 3}{3x - 3}$ . Se pide:

- Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.
- Razona si existen máximos, mínimos y puntos de inflexión. En caso de existir, calcúlalos.
- Estudia la existencia de asíntotas. En caso de que existan, calcúlalas.
- Con la información obtenida representa la gráfica de la función.

9. (Selectividad. Castilla-La Mancha, 1995). Sea:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & 0 < x < 1 \\ \ln x & x > 1 \end{cases}$$

- Representa gráficamente  $f(x)$ .
- A partir de su gráfica, estudia el crecimiento de  $f(x)$ . Halla los puntos de corte con los ejes.

10. (Selectividad. Madrid, 1997). Sea la función:

$$y = \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x^2$$

- Analiza sus puntos de inflexión en  $\mathbb{R}$ .
- Analiza su máximo absoluto en  $\mathbb{R}$ .

11. (Selectividad. Madrid, 1998). Un club deportivo cuenta con un número de socios que viene dado (en miles de personas) por la función:

$$s(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 26$$

donde  $x$  indica el número de años desde la última remodelación.

- Halla el año en el que el club ha tenido el mayor número de socios.
- El cuarto año se remodeló de nuevo. Indica razonadamente si esta remodelación tuvo éxito o no.

12. (Selectividad. Galicia, 1999). Un granjero dispone de 3.000 euros para cercar una porción de terreno rectangular adyacente a un río, usando a éste como un lado de área cercada, es decir, construirá tres cercas. El coste de la cerca paralela al río es de 5 euros por metro y para cada uno de los lados restantes es de 3 euros por metro. Calcúlense las dimensiones del área máxima que puede ser cercada.
13. (Selectividad. Valencia, 1994). Una hoja de papel debe tener  $18 \text{ cm}^2$  de texto impreso, márgenes superior e inferior de 2 cm de altura y márgenes laterales de 1 cm de anchura. Obtén razonadamente las dimensiones que minimizan la superficie del papel.
14. (Selectividad. Andalucía, 1997). El precio de cada bloque de una cierta materia es proporcional al cuadrado de su peso. Tenemos un bloque de 20 kg que cuesta 500 ptas.
- Si el bloque se rompe en dos trozos de 5 y 15 kg, ¿cuál es ahora el precio de los dos trozos?
  - Demuestra que si el bloque se rompe en dos trozos cualesquiera, siempre se depreciará.
  - Calcula para qué partición se produce la máxima pérdida de valor.
15. (Selectividad. Alicante, 1994). Estudia la concavidad, convexidad y los intervalos de crecimiento de la función  $f(x) = x \cdot e^x$ . Dibuja la gráfica de la función.
16. (Selectividad. Castellón, 1994). Dada la función:
- $$y = |x^2 - 7|$$
- Representala gráficamente.
  - Determina la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa  $x = 1$ .
  - Halla sus máximos y mínimos relativos.
17. (Selectividad. Andalucía, 1998). Un rectángulo mide 8 dm de largo y 4 dm de ancho. De cada esquina se recorta un cuadrado de lado  $x$ , con el fin de hacer una caja sin tapa.
- Calcula el volumen de la caja en función de  $x$ .
  - Halla  $x$  para que el volumen sea máximo.
  - Halla dicho volumen máximo.
18. (Selectividad. Oviedo, 1994). Cierta entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad,  $R(x)$ , en miles de pesetas, viene dada en función de la cantidad que se invierta,  $x$ , en miles de pesetas, por medio de la siguiente expresión:
- $$R(x) = -0,001x^2 + 0,5x + 2,5$$
- Deduce razonadamente qué cantidad de dinero le conviene invertir a un cliente en dicho plan.
  - ¿Qué rentabilidad obtendría?
19. (Selectividad. Murcia, 1994). Representa gráficamente la curva:
- $$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}$$
20. (Selectividad. Madrid, 1996). Haz un esquema de la gráfica de la función  $y = x^2 - 5x + 6$  calculando sus máximos o mínimos relativos y los puntos de corte con el eje de abscisas.
21. (Selectividad. Cataluña, 1997). Busca los máximos y mínimos de la función  $f(x) = \frac{100x}{x^2 + 400}$ .
- Indica también si dicha función tiene alguna asíntota horizontal o vertical.
22. (Selectividad. Zaragoza, 1997). Para la función:
- $$f(x) = ax^2 + b \ln x$$
- Calcula los valores de  $a$  y  $b$  para que  $f(x)$  tenga un punto de inflexión en el punto  $(1, 2)$ .
23. (Selectividad. Extremadura, 1996). Cierta tipo de bengala permanece encendida un tiempo de 4 minutos. Se ha comprobado que el porcentaje de luminosidad que produce viene dado, considerando el tiempo en minutos, a través de la función:
- $$f(t) = 25t(4 - t) \quad 0 \leq t \leq 4$$
- ¿Para qué valor de  $t$  se obtiene el porcentaje de luminosidad máximo?
  - ¿En qué intervalo de tiempo decrece el porcentaje de luminosidad?
  - ¿Para qué valores de  $t$  el porcentaje de luminosidad es del 75%?
- Justifica las respuestas.
24. (Selectividad. Zaragoza, 1999). Dada la función:
- $$f(x) = \frac{bx}{x^2 + 1}$$
- con  $b$  un parámetro real distinto de 0. Se pide:
- Determina las asíntotas de la función  $f(x)$  para cualquier valor del parámetro  $b$ .
  - Determina el valor del parámetro  $b$  para que la función  $f(x)$  tenga un máximo en el punto  $(1, 3)$ .
25. (Selectividad. Andalucía, 1996). De la función  $f(x) = ax^2 + bx + c$  se sabe que la gráfica de su derivada  $f'(x)$  es la recta que pasa por los puntos  $(2, -1)$  y  $(-2, 1)$ . También se sabe que el máximo de  $f(x)$  es 1. Determina  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

## Utilizar un esquema o un problema conocido

Esta estrategia, aunque elemental en su planteamiento, es, quizás, la más utilizada en la resolución de problemas.

Cuando nos enfrentamos a una situación problemática, lo primero que hacemos es comprobar si hay algún problema similar que hayamos resuelto antes. Si es así, los pasos o estrategias utilizados en aquél serán aplicables a éste.

En los problemas de máximos y mínimos aparece muy a menudo un esquema similar al siguiente:

- Una función que queremos optimizar y que puede depender de más de un parámetro.
- Establecimiento de una relación entre los parámetros para dejar la función dependiendo de sólo uno de ellos.
- Seguimiento de los pasos normales para calcular máximos y mínimos.

### Problema 1

En una oficina de correos sólo se admiten paquetes con forma de paralelepípedo rectangular, tales que su anchura sea igual a su altura y, además, la suma de sus tres dimensiones debe ser de 72 cm. Halla las dimensiones del paralelepípedo para que el volumen sea máximo.

#### Solución

Si llamamos  $x, y, z$  a las dimensiones del paralelepípedo, la función que debemos maximizar es:

$$V = x \cdot y \cdot z$$

que depende de tres parámetros.

- Como sabemos que la altura debe ser igual a la anchura:  $x = y$ .
- Como la suma de las tres dimensiones debe valer 72 cm:  $x + y + z = 72$ .
- De estas dos igualdades se deduce que  $y = x$ ;  $z = 72 - 2x$ , luego:

$$V(x) = x \cdot x \cdot (72 - 2x) = 72x^2 - 2x^3$$

expresión del volumen en función de una sola variable,  $x$ .

Ahora podemos seguir los pasos habituales para calcular el máximo de la función:

$$V'(x) = 144x - 6x^2$$

$$V'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$\text{y } x = 24$$

La solución  $x = 0$  se desecha porque nos lleva a un paralelepípedo de volumen 0. Calculamos la derivada segunda para corroborar que se trata de un máximo:

$$V''(x) = 144 - 12x; \quad V''(24) = -144 < 0$$

Las dimensiones son:

$$x = 24 \text{ cm, } y = 24 \text{ cm, } z = 24 \text{ cm.}$$

### Problema 2

En una ventana rectangular se ha sustituido el lado superior por un semicírculo. Su perímetro total es de 4 m. ¿Qué dimensiones tiene, si la cantidad de luz que penetra es máxima?

### Problema 3

Halla los catetos del triángulo rectángulo de área máxima inscrito en una semicircunferencia de radio 10 cm.