EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. ***(Selectividad. Murcia, 1999).*** *Se considera la función* $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 4}$*. Se pide:*

a) Dominio de la función, puntos de corte con los ejes y simetrías.

b) Asíntotas y regiones de existencia de la gráfica.

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos, si los hay.

d) Representación gráfica aproximada.

Solución

a) Dominio: $D = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Cortes con los ejes:

Eje OX:

Para $y = 0$; $\dfrac{x}{x^2 - 4} = 0 \Rightarrow x = 0$; punto $(0, 0)$

Eje OY:

Para $x = 0$; $y = 0$; punto $(0, 0)$

Simetrías:

Como $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 4} = -\dfrac{x}{x^2 - 4} = -f(x)$,

la función es simétrica respecto del origen.

b) Asíntotas:

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 - 4} = 0, \text{ asíntota horizontal } y = 0$$

Asíntotas verticales:

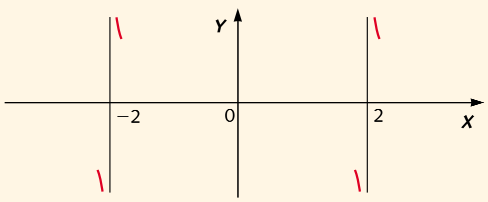
En $x = -2$

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x}{x^2 - 4} = -\infty; \quad \lim_{x \to -2^+} \frac{x}{x^2 - 4} = +\infty$$

En $x = 2$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x}{x^2 - 4} = -\infty; \quad \lim_{x \to 2^+} \frac{x}{x^2 - 4} = +\infty$$

La posición de la curva respecto de las asíntotas verticales es:

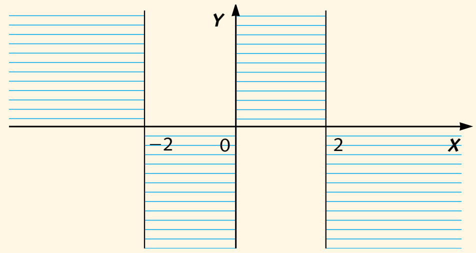


No hay asíntotas oblicuas.

Regiones de existencia:

Considerando la descomposición factorial de la función, los puntos a considerar para que cambie el signo de la fracción son: $x = -2$, $x = 0$ y $x = 2$.

Las regiones de existencia son:

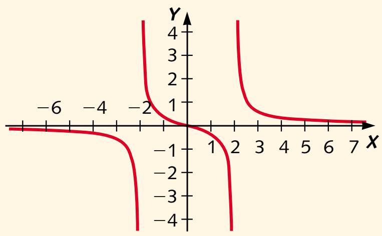


c) Crecimiento y decrecimiento. Máximos y mínimos.

$$f'(x) = \frac{x^2 - 4 - x \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{-x^2 - 4}{(x^2 - 4)^2} < 0 \quad \forall x$$

La función es decreciente en todo su dominio. No tiene extremos relativos.

d) Representación gráfica:



2. ***(Selectividad. Oviedo, 1999).*** *Un individuo ha invertido en acciones de cierta compañía durante los últimos 10 años. El valor de su cartera a lo largo del tiempo (dinero invertido más beneficios obtenidos, en miles) viene dado por la siguiente expresión (x en años):*

$$F(x) = (x - 2)^2 \cdot (1 - 2x) + 252x + 116$$
$$\text{con } 0 \leq x \leq 10$$

a) Determina los intervalos de tiempo en los que el valor de la cartera creció y aquellos en los que decreció.

b) El individuo retira sus ingresos transcurridos los 10 años. ¿Cuál hubiera sido realmente el mejor momento para haberlo hecho? ¿Cuánto pierde por no haberlo retirado en el momento óptimo?

Solución

a) Para contestar a la primera cuestión calculamos la derivada primera:

$$F'(x) = 2(x - 2)(1 - 2x) + (x - 2)^2(-2) + $$
$$+ 252 = -6x^2 + 18x + 240$$

Igualamos a cero y simplificamos:

$$x^2 - 3x - 40 = 0$$

Ecuación de segundo grado cuyas raíces son:

$$x = -5 \text{ y } x = 8$$

La solución $x = -5$ no se considera ya que no se encuentra en el dominio de la función. Estudiamos si en $x = 8$ hay un máximo o un mínimo, calculamos para ello la derivada segunda:

$$F''(x) = -12x + 18; \quad F''(8) < 0$$

En el punto de abscisa $x = 8$ hay un máximo. La función es creciente en el intervalo (0, 8) y decreciente en el intervalo (8, 10). El máximo corresponde al punto (8, 1.592).

El mejor momento para retirar los ingresos hubiese sido el correspondiente al máximo. Transcurridos 8 años hubiese retirado 1.592.000 ptas.

Transcurridos 10 años retiró:

$F(10) = 8^2 \cdot (-19) + 252 \cdot 10 + 116 = 1420$, es decir, 1.420.000 ptas.

El dinero perdido es:

$$1.592.000 - 1.420.000 = 172.000 \text{ ptas.}$$

3. ***(Selectividad. Burgos, 1995).*** *Halla* a *y* b *para que la función* $f(x) = a\ln x + bx^2 + x$ *tenga extremos en los puntos* $x_1 = 1$ *y* $x_2 = 2$. *Para esos valores de* a *y* b, *¿qué tipo de extremos tiene la función en 1 y en 2?*

Solución

Si la función presenta extremos en $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$, la derivada primera debe anularse en dichos puntos.

$$f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx + 1$$

$$f'(1) = a + 2b + 1 = 0; \; f'(2) = \frac{a}{2} + 4b + 1 = 0$$

de donde: $a = -\dfrac{2}{3}, \; b = -\dfrac{1}{6}$.

Veamos qué tipo de extremos tiene. Para decidirlo estudiaremos el signo de la segunda derivada. La función para los valores hallados es:

$$f(x) = -\frac{2}{3}\ln x - \frac{1}{6}x^2 + x$$

$$f'(x) = -\frac{2}{3x} - \frac{1}{3}x + 1$$

$$f''(x) = \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3}$$

de donde: $f''(1) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3} > 0$

luego en $x = 1$ hay un mínimo.

Y como $\quad f''(2) = \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{3} = -\dfrac{1}{6} < 0$

en $x = 2$ hay un máximo.

4. ***(Selectividad. Alicante, 1995).*** *Un jardinero quiere construir un parterre en forma de sector circular y que tenga de perímetro 20 m. Se pregunta acerca del radio que debe tomar para lograr que el área del parterre sea máxima.*

a) Expresa el área del parterre, S, *como función del radio,* r.

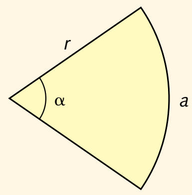
b) Determina el valor del radio que maximiza S.

c) ¿Cuál es la amplitud de este sector de máxima superficie?

d) ¿Qué criterio se utilizará para garantizar que la solución encontrada corresponde ciertamente a un máximo?

Solución

Consideremos un sector circular de radio r, arco a y ángulo α.



Deducimos la fórmula del área de dicho sector a partir de la fórmula del área del círculo y de la longitud de la circunferencia.

$$A = \pi r^2; \quad L = 2\pi r$$

Si llamamos S al área del sector circular, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} 2\pi r \text{ ——— } \pi r^2 \\ a \text{ ——— } S \end{array}\right\} \quad S = \frac{\pi r^2 a}{2\pi r} = \frac{ra}{2}$$

a) Para expresar el área S en función del radio utilizamos la relación que proporciona el perímetro del parterre, $2r + a = 20$, de donde:

$$a = 20 - 2r$$

Sustituyendo en la fórmula de S:

$$S = \frac{r\,(20 - 2r)}{2} = 10r - r^2$$

b) Derivando e igualando a 0:

$$S' = 10 - 2r; \quad 10 - 2r = 0 \Rightarrow r = 5 \text{ m}$$

c) Para calcular el valor de la amplitud, α, correspondiente a esta solución, calculamos primero el valor de a:

$$a = 20 - 2 \cdot 5 = 10 \text{ m}$$

y el ángulo correspondiente a este arco (expresado en radianes) se obtiene mediante una regla de tres:

$$\begin{array}{l} 2\pi r \text{ ——— } 2\pi \\ 10 \text{ ——— } \alpha \end{array}$$

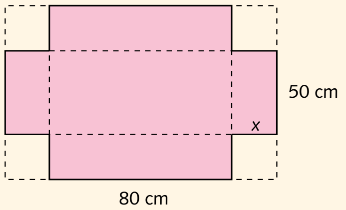
$$\alpha = \frac{20\pi}{2\pi r} = \frac{10}{5} = 2 \text{ radianes}$$

d) Para garantizar que la solución corresponde a un máximo, calculamos la derivada segunda:

$$S'' = -2 < 0$$

luego efectivamente se trata de un máximo.

5. ***(Selectividad. León, 1994).*** *Recortando convenientemente en cada esquina de una lámina de cartón de dimensiones 80 cm × 50 cm un cuadrado de lado* x *y doblando convenientemente (véase figura), se construye una caja. Calcula* x *para que el volumen de dicha caja sea máximo.*



Solución

Las longitudes de las aristas de la caja son:

$$80 - 2x, \quad 50 - 2x, \quad x$$

luego el volumen es:

$$V(x) = (80 - 2x) \cdot (50 - 2x) \cdot x = 4x^3 - 260x^2 + 4.000x$$

Calculamos la primera derivada:

$$V'(x) = 12x^2 - 520x + 4.000$$

Igualamos a cero y hallamos sus raíces:

$$12x^2 - 520x + 4.000 = 0 \Rightarrow x_1 = 10; \ x_2 = \frac{100}{3}$$

Para determinar cuál de ellas corresponde a un máximo y cuál a un mínimo, calculamos la derivada segunda: $V''(x) = 24x - 520$, y sustituimos:

$$V''(10) = 240 - 520 < 0$$

luego corresponde a un máximo.

Para el otro valor $x_2 = \dfrac{100}{3}$:

$$V''\left(\frac{100}{3}\right) = \frac{2.400}{3} - 520 > 0$$

obtenemos un mínimo.

Este valor no tiene sentido en el contexto del problema, ya que no podemos cortar de un lado que mide 50 cm dos trozos de $33,\widehat{3}$ cm cada uno.

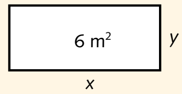
6. ***(Selectividad. Andalucía, 1996).*** *Se desea construir un marco para una ventana rectangular de 6 m^2 de superficie. El metro lineal de tramo horizontal cuesta 2.000 ptas. y el tramo vertical 3.000 ptas. Calcula:*

a) Las dimensiones de la ventana para que el coste del marco sea mínimo.

b) El coste del marco.

Solución

a)



La función que debemos hacer mínima es:

$$C = 2x \cdot 2.000 + 2y \cdot 3.000 = 4.000x + 6.000y$$

La relación entre las dos variables es:

$$xy = 6 \qquad y = \frac{6}{x}$$

La función expresada con una sola variable es:

$$C = 4.000x + \frac{36.000}{x}; \quad C' = 4.000 - \frac{36.000}{x^2}$$

que igualada a 0:

$$4.000 - \frac{36.000}{x^2} = 0 \Rightarrow x = \pm 3$$

Nos quedamos con la solución positiva, ya que, además de ser la que tiene sentido en este contexto, es la que corresponde a un mínimo, pues:

$$C'' = \frac{72.000}{x^3}$$

Las dimensiones son $x = 3$ m e $y = 2$ m.

b) Coste $= 6 \cdot 2.000 + 4 \cdot 3.000 = 24.000$ ptas.

7. ***(Selectividad. Zaragoza, 1998).*** *Un cultivador de cítricos estima que si se plantan 60 naranjos en un huerto, la producción media por árbol será de 400 naranjas y ésta disminuirá en un promedio de 5 naranjas por árbol por cada árbol adicional plantado en el huerto. Se pide:*

a) Determinar la función de producción total de naranjas.

b) ¿Cuántos árboles se deben plantar en el huerto para maximizar la producción total de naranjas? ¿Cuál es dicha producción máxima? Razonar la respuesta.

Solución

a) Si llamamos x al número de árboles adicionales, la función de producción es:

$$P(x) = (60 + x)(400 - 5x)$$

b) $P'(x) = 400 - 5x + (60 + x)(-5) = 100 - 10x$

Igualando a cero: $100 - 10x = 0 \Rightarrow x = 10$.

Como $P''(x) = -10 < 0$, la producción será máxima si se plantan 10 árboles adicionales. Esa producción máxima es:

$$P(10) = 70 \cdot 350 = 24.500 \text{ naranjas}$$

8. ***(Selectividad. Madrid, 1998).*** *Sea la función:*

$$f(x) = 2x^3 + bx^2 + ax - 5$$

Halla los valores de a *y* b *de forma que* f *tenga un máximo en* x = 1 *y un mínimo en* x = 2.

Solución

Si tiene un máximo en $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0$:

$$f'(x) = 6x^2 + 2bx + a; \; f'(1) = 6 + 2b + a$$
$$6 + 2b + a = 0$$

Si tiene un mínimo en $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0$:

$$f'(2) = 24 + 4b + a$$
$$24 + 4b + a = 0$$

Si se resuelve el sistema formado por las dos ecuaciones se obtiene la solución:

$$a = 12 \text{ y } b = -9$$

La función es: $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 5$.

Comprobamos que en $x = 1$ hay un máximo:

$$f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$$
$$f''(x) = 12x - 18$$
$$f''(1) = -6 < 0$$

De la misma forma, como $f''(2) = 6 > 0$, en $x = 2$ hay un mínimo.

9. ***(Selectividad. Murcia, 1997).*** *Halla los valores de* a, b *y* c *de forma que la función:*

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

pase por el origen y tenga extremos en $x = -4$ *y* $x = 2$. *¿De qué tipo de extremos se trata?*

Solución

Por pasar por el origen, $f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$.

Si tiene un extremo en $x = -4$, $f'(-4) = 0$;

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b; \; f'(-4) = 48 - 8a + b = 0$$
$$48 - 8a + b = 0$$

Por tener un extremo en $x = 2$, $f'(2) = 0$.

$$f'(2) = 12 + 4a + b$$
$$12 + 4a + b = 0$$

Si se resuelve el sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 48 - 8a + b = 0 \\ 12 + 4a + b = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a = 3, \; b = -24$$

La función es $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x$.

Para determinar el tipo de extremos que hay en esos puntos, calculamos la derivada segunda:

$$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24; \quad f''(x) = 6x + 6$$

Como $f''(-4) = -24 + 6 = -18 < 0$; en $x = -4$ hay un máximo relativo.

Como $f''(2) = 12 + 6 = 18 > 0$, en $x = 2$ hay un mínimo relativo.

10. ***(Selectividad. Navarra, 1994).*** *Estudia y representa:*

$$y = \frac{\ln x}{x}$$

Solución

1. *Dominio:* La función sólo está definida para valores positivos de x:

$$D = \mathbb{R}^+$$

2. *Simetrías:* No tiene.
3. *Cortes con los ejes*

Con el eje OX, hacemos $y = 0$:

$$\frac{\ln x}{x} = 0; \; \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

Punto de corte $(1, 0)$.

No hay corte con el eje OY.

4. *Asíntotas*

Horizontales: $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow y = 0$

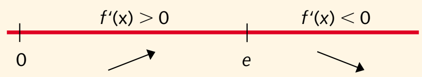
Verticales: $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty \Rightarrow x = 0$

No hay asíntotas oblicuas.

5. *Crecimiento, decrecimiento, máximos y mínimos*

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

igualando a 0: $\ln x = 1 \Rightarrow x = e$

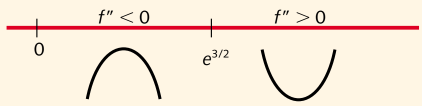


Máximo relativo en $\left(e, \dfrac{1}{e}\right)$.

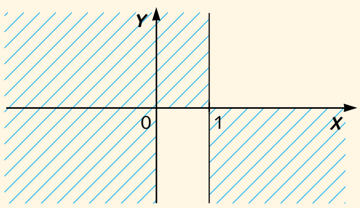
6. *Concavidad, convexidad, puntos de inflexión*

$$f''(x) = \frac{2 \ln x - 3}{x^3}$$

igualamos a 0: $2 \ln x - 3 = 0 \Rightarrow x = e^{3/2}$



7. *Regiones*



8. *Gráfica*