I.E.S. SATAFI	Sacitámetam	Curso 2º Bachillerato.	Fecha :

Nombre		Grupo	

1.-) ELIGE UNA de las siguientes funciones y represéntala detalladamente haciendo uso de la información que proporcionan la propia función y sus derivadas.

a) $f(x)=\dfrac{9-x^2}{x-1}$	b) $g(x)=\dfrac{x^2-16}{x^2-25}$	c) $g(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$	d) $g(x)=\dfrac{Ln(x)}{x}$ (jejeje…)

2.-) Determina el valor de los parámetros a, b y c para que f(x) pase por el origen de coordenadas y tenga extremos en x = –4 y en x = 2. Indica también de qué tipo de extremos se trata cada uno.

3.-) Un individuo ha invertido en acciones de cierta compañía durante los últimos 10 años. El valor de su cartera a lo largo del tiempo (dinero invertido más beneficios obtenidos, en miles) viene dado por la siguiente expresión (x en años): $F(x) = (x-2)^2\cdot(1-2x) + 252x + 116$ con $0 \le x \le 10$.

a) Determina los intervalos de tiempo en los que el valor de la cartera creció y aquellos en los que decreció.

b) El individuo retira sus ingresos transcurridos los 10 años. ¿Cuál hubiera sido realmente el mejor momento para haberlo hecho? ¿Cuánto pierde por no haberlo retirado en el momento óptimo?

4.-) Elige uno de los siguientes problemas y resuélvelo planteando la función apropiada y optimizándola:

a) Un jardinero debe diseñar un jardín rectangular pegado a la valla de un cementerio aprovechando ésta. En el lado paralelo a la valla sembrará margaritas cuyo coste asciende a 5€ el metro y en los otros dos lados sembrará claveles cuyo coste asciende a 9 € el metro. Si dispone de un presupuesto de 7200 € ¿qué dimensiones debe tener el jardín para que su superficie mida tanto como sea posible?

b) El mago Rincewind ha comprobado que Yvoyalarruina-Escurridizo, Yvo para los amigos, a un precio de 50 $ickles la unidad, vende una media de 300 varitas mágicas diarias, pero por cada $ickle que aumenta el precio, vende tres varitas menos al día. Si el coste de fabricación de la unidad es de 30 $ickles., ¿a qué precio de venta es máximo el beneficio diario que obtiene el Yvo?

Ejercicio:	1.)	2.-)	3.-)	4.-)
Puntuación:	4,5	2	1,5	2

$$f(x)=\frac{9-x^2}{x-1}$$

Dominio: Por ser racional es todo R menos los puntos que anulan el denominador. → x–1 = 0 ⇔ x=1

Dom(f) = $\Re$–{1} x=1 es la única discontinuidad. La clasificaré después.

Cortes con los ejes:

Eje Y: Hacemos x=0 $f(x)=\frac{9-0^2}{0-1}=-9$ **Punto (0,-9)**

Eje X; Hacemos y=0 $0=\frac{9-x^2}{x-1}$ → $0=9-x^2 \Rightarrow x=-3$ ó $x=3$ **puntos (-3,0) y (3,0)**

Signo de f(x): Los puntos clave son los cortes con el eje X y los que quedan fuera del dominio; -3, 1, 3

Intervalo (-∞,-3) : $f(-4)=\frac{9-(-4)^2}{-4-1}=\frac{-7}{-5}=\frac{7}{5}>0$

Intervalo (-3,1) : $f(0)=-9<0$

Intervalo (1,3) : $f(2)=\frac{9-2^2}{2-1}=\frac{7}{1}=5>0$

Intervalo (3,∞) : $f(4)=\frac{9-4^2}{4-1}=\frac{-7}{3}<0$

Asíntotas: Verticales. Único candidato **x=1** $\lim_{x\to 1}\frac{9-x^2}{x-1}=\frac{9}{0}=(\pm)\infty$ ¡¡!! Sí lo es. (los límites laterales los conocemos por el estudio de los signos)

Horizontales: $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{9-x^2}{x-1}=\begin{cases}-\infty & \text{si x} \to +\infty \\ +\infty & \text{si x} \to -\infty\end{cases}$ Luego **NO HAY**

Oblicuas:
$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{\frac{9-x^2}{x-1}}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{9-x^2}{x^2-x}=-1 \\ \\ \lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{9-x^2}{x-1}-(-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{9\cancel{-x^2}\cancel{+x^2}-x}{x-1}=-1\end{array}\right\}\Rightarrow y=-x-1 \text{ es asíntota oblicua en } \pm\infty$$

Monotonía, máx y mín:

$$f'(x)=\frac{-2x\ (x-1)-(9-x^2)}{(x-1)^2}=\frac{-x^2+2x-9}{x-1};$$

$$f'(x)=0;\quad \frac{-x^2+2x-9}{(x-1)^2}=0\Rightarrow -x^2+2x-9=0\Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-1)(-9)}}{2(-1)}\quad \text{Sin solución real}$$

No máx o mín locales.

Crecimiento: único punto clave: el que marca el dominio x = 1

Intervalo (-∞,1) → $f'(0)=\frac{-0^2+2\cdot 0-9}{(0-1)^2}=-9<0$; decreciente Intervalo (1,∞) → $f'(2)=\frac{-2^2+2\cdot 2-9}{(2-1)^2}=-9<0$; decreciente

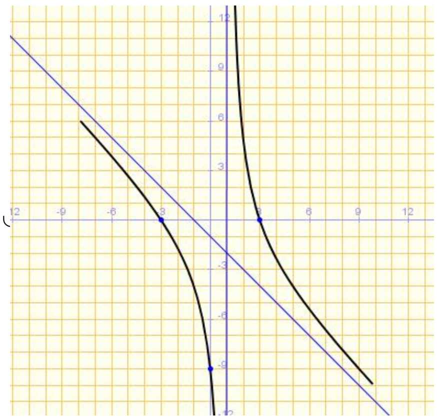
Curvatura:

$$f''(x)=\frac{(-2x+2)(x-1)^{\cancel{2}}-2\cancel{(x-1)}(-x^2+2x-9)}{(x-1)^{\cancel{4}\to 3}}=\frac{(-2x+2)(x-1)-2(-x^2+2x-9)}{(x-1)^3}=\frac{16}{(x-1)^3};$$

$f''(x)=0;\quad \frac{16}{(x-1)^3}=0\Rightarrow 16=0$ ¡¡!! $\Rightarrow$ Sin solución. No hay puntos de inflexión.

Único punto clave : x=1 (dado por el dominio)

Intervalo (-∞,1) f''(0)=$\frac{16}{(0-1)^3}=-16$ cóncava ∩ ; Intervalo (1,∞) f''(2)=$\frac{16}{(2-1)^3}=16$ convexa



$$f(x)=\frac{16-x^2}{x^2-25}$$

Dominio: Por ser racional es todo R menos los puntos que anulan el denominador. → $x^2-25=0 \Leftrightarrow x=-5 \quad x=5$

Dom(f) = $\Re-\{\pm 5\}$ x=+5 x = –5 son las únicas discontinuidades. La clasificaré después.

Cortes con los ejes:

Eje Y: Hacemos x=0 $f(x)=\dfrac{16-0^2}{0-25}=\dfrac{-16}{25}$ **Punto (0,-9)**

Eje X; Hacemos y=0 $0=\dfrac{16-x^2}{x^2-25}$ → $0=16-x^2 \Rightarrow x=-4$ ó $x=4$ **puntos (-4,0) y (4,0)**

Signo de f(x): Los puntos clave son los cortes con el eje X y los que quedan fuera del dominio; -4, 1, 4

Intervalo (-∞,-5) : $f(-6)=\dfrac{16-(-6)^2}{(-6)^2-25}=\dfrac{-20}{11}<0$

Nota: Si hubiésemos visto la paridad, nos ahorraríamos trabajo.

Intervalo (-5,-4) : $f(0)=\dfrac{16-(-4,5)^2}{(-4,5)^2-25}>0$

Intervalo (-4,4) : $f(0)=\dfrac{16}{-25}<0$

Intervalo (4,5) : $f(2)=\dfrac{16-(4,5)^2}{(4,5)^2-25}>0$

Intervalo (5,∞) : $f(4)=\dfrac{16-6^2}{6^2-25}=\dfrac{-20}{11}>0$

Asíntotas: Verticales. Candidatos **x= –5** y **x= 5** $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{16-x^2}{x^2-25}=\dfrac{-9}{0}=(\pm)\infty$ ¡¡!! $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{16-x^2}{x^2-25}=\dfrac{-9}{0}=(\pm)\infty$ ¡¡!!

Sí lo son. (los límites laterales los conocemos por el estudio de los signos)

Horizontales: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{16-x^2}{x^2-25}=-1$ Luego **SÍ HAY** en **y = –1**. (No puede haber oblicuas)

Monotonía, máx y mín:

$$f'(x)=\frac{-2x\ (x^2-25)-2x(16-x^2)}{(x^2-25)^2}=\frac{18x}{(x^2-25)^2};$$

Candidato: x=0.

$$f'(x)=0;\quad \frac{18x}{(x^2-25)^2}=0 \Rightarrow 18x=0 \Rightarrow x=0 \text{ Único candidato a max-min}$$

Crecimiento: Puntos clave : x= –5 (dom) x=0 (candidato) x=5 (dom)

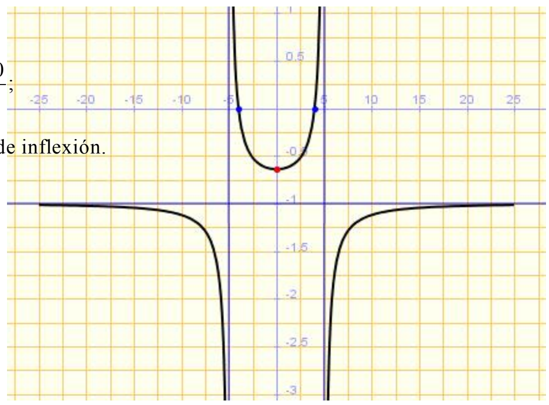
Intervalo (-∞,-5) → $f'(-6)=\dfrac{18(-6)}{(36-25)^2}=\dfrac{-108}{(9)^2}<0;$ decreciente

Intervalo (-5,0) → $f'(-1)=\dfrac{18(-1)}{(1-25)^2}=<0;$ decreciente

Intervalo (0,5) → $f'(1)=\dfrac{18(1)}{(1-25)^2}>0;$ creciente

Intervalo (5,∞) → $f'(6)=\dfrac{18(6)}{(36-25)^2}=\dfrac{108}{(9)^2}>0$ creciente

Curvatura:



$$f''(x)\frac{18x}{(x^2-25)^2}=\frac{18\cdot(x^2-25)^{\cancel{2}}-18x\cdot 2\,\cancel{(x^2-25)}\cdot 2x}{(x^2-25)^{\cancel{4}\to 3}}=\frac{18\cdot(x^2-25)-72x^2}{(x^2-25)^3}=\frac{-54x^2-450}{(x^2-25)^3};$$

$f''(x)=0;\quad \dfrac{-54x^2-450}{(x^2-25)^3}=0 \Rightarrow -54x^2-450=0$ ¡¡!! $\Rightarrow$ Sin solución. No hay puntos de inflexión.

Únicos puntos clave : x = -5 y x = 5 (dado por el dominio)

Intervalo (-∞,-5) f''(-6)= $\dfrac{-54\cdot 36\ -450}{(36-25)^3}<0$ cóncava ∩ ;

Intervalo (-5,5) f''(0)= $\dfrac{-450}{(0-25)^3}>0$ convexa ∪

Intervalo (5,∞) f''(6)= $\dfrac{-54\cdot 36\ -450}{(36-25)^3}<0$ cóncava ∩ ;

$$f(x)=\frac{x}{x^2-4}$$

Dominio: Por ser racional es todo R menos los puntos que anulan el denominador. $\rightarrow x^2-4=0 \Leftrightarrow x=-2 \quad x=2$

Dom(f) = $\Re-\{\pm 2\}$ x=+2 x = –2 son las únicas discontinuidades. La clasificaré después.

Cortes con los ejes:

Eje Y: Hacemos x=0 $f(x)=\dfrac{0}{0^2-4}=0$ **Punto (0,0)**

Eje X; Hacemos y=0 $0=\dfrac{x}{x^2-4} \quad \rightarrow \quad x=0$ **El mismo**

Signo de f(x): Los puntos clave son los cortes con el eje X y los que quedan fuera del dominio; -2, 0, 2

Intervalo (-∞,-2) : $f(-3)=\dfrac{-3}{9-4}<0$ Nota: Si hubiésemos visto la paridad, (es impar)

Intervalo (-2,0) : $f(-1)=\dfrac{-1}{1-4}>0$ nos ahorraríamos trabajo.

Intervalo (0,2) : $f(1)=\dfrac{1}{1-4}<0$

Intervalo (2,∞) : $f(3)=\dfrac{3}{9-4}>0$

Asíntotas: Verticales. Candidatos **x= –2** y **x= 2** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{x^2-4}=\dfrac{2}{0}=(\pm)\infty$ ¡¡!! $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x}{x^2-4}=\dfrac{-2}{0}=(\pm)\infty$ ¡¡!!

Sí lo son. (los límites laterales los conocemos por el estudio de los signos)

Horizontales: $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x^2-4}=0$ Luego **SÍ HAY** en **y = 0**. (No puede haber oblicuas)

Monotonía, máx y mín:

$f'(x)=\dfrac{(x^2-4)-x\cdot 2x}{(x^2-4)^2}=\dfrac{-4-x^2}{(x^2-4)^2};$ **No máx o mín locales**.

$f'(x)=0; \quad \dfrac{-4-x^2}{(x^2-4)^2}=0 \Rightarrow -4-x^2=0 \Rightarrow SIN$ solución real.

Crecimiento: Puntos clave : x= –2 x=2 (dom)

Intervalo (-∞,-2) $\rightarrow$ $f'(-3)=\dfrac{-4-9}{(9-4)^2}=<0;$ decreciente

Intervalo (-2,2) $\rightarrow$ $f'(0)=\dfrac{-4-0}{(0-4)^2}<0;$ decreciente

Intervalo (2,∞) $\rightarrow$ $f'(3)=\dfrac{-4-9}{(9-4)^2}<0;$ decreciente

Curvatura:

$$f''(x)=\frac{-2x\cdot(x^2-4)^{\cancel{2}}-(-4-x^2)\cdot 2\,\cancel{(x^2-4)}\cdot 2x}{(x^2-4)^{\cancel{4}\to 3}}=\frac{-2x\cdot(x^2-4)-(-4-x^2)\cdot 2\cdot 2x}{(x^2-4)^3}=\frac{2x^3+16x}{(x^2-4)^3};$$

$f''(x)=0; \quad \dfrac{2x^3+16x}{(x^2-4)^3}=0 \Rightarrow 2x^3+16x=0 \Rightarrow x\cdot(2x^2+16)=0 \Rightarrow$ Única solución. x = 0

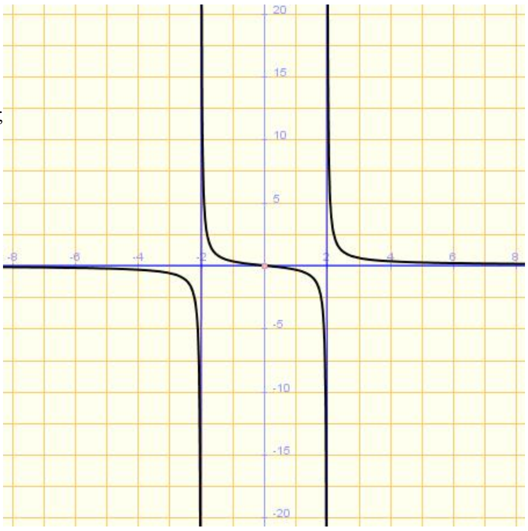
Puntos clave : x = -2 x= 0 y x = 2

Intervalo (-∞,-2) f''(-3)=$\dfrac{2(-27)+16(-3)}{(9-4)^3}<0$ cóncava $\cap$;

Intervalo (-2,0) f''(-1)=$\dfrac{-2-16}{(1-4)^3}>0$ convexa $\cup$

Intervalo (0,2) f''(1)=$\dfrac{2+16}{(1-4)^3}<0$ cóncava $\cap$

Intervalo (2,∞) f''(3)=$\dfrac{2\cdot(27)+16\cdot(3)}{(9-4)^3}>0$ convexa $\cup$;



Extras:

Función 1: ¿Se cortan la función y la asíntota?

$$\frac{9-x^2}{x-1} = -x-1 \quad \Rightarrow \; 9-x^2 = 1-x^2 \Rightarrow 8=0$$ ¡Sin solución ! NO se cortan.

Función 2: Paridad:

$$f(-x) = \frac{16-(-x)^2}{(-x)^2-25} = \frac{16-x^2}{x^2-25} = f(x)$$ ¡¡Para cualquier valor de x!! luego ES PAR

¿Corta la función a la asíntota horizontal?

$$\frac{16-x^2}{x^2-25} = -1 \Rightarrow 16-x^2 = 25-x^2 \Rightarrow 0=9$$ ¡¡!! NO

Función 3: Paridad

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-4} = \frac{-x}{x^2-4} = -\frac{x}{x^2-4} = -f(x)$$ ¡¡Para todo x!!, luego ES IMPAR

La cuarta gráfica y los problemas 2 y 3 están en los ejercicios resueltos del libro.

El problema del jardinero está resuelto en clase empleando otro enunciado: “Se quiere cercar un terreno pegado a un rio…” (ejercicios propuestos problema nº 12)

El problema de Yvo es idéntico al resuelto en clase (ejercicios propuestos problema nº 6).