# EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

**1.** *Dada la función* $f(x) = x^2 - 2x$, *halla:*

*a) La variación de dicha función entre 1 y 3.*

*b) Un punto t tal que entre 0 y t la variación sea de 8 unidades.*

*c) Dos puntos entre los cuales la variación de la función sea 0.*

**Solución**

a) $f(3) - f(1) = 3 - (-1) = 4$

b) $f(t) - f(0) = 8$

$$t^2 - 2t - 0 = 8$$
$$t^2 - 2t - 8 = 0$$
$$t = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 32}}{2} = \frac{2 \pm 6}{2} = \begin{cases} 4 \\ -2 \end{cases}$$

La solución $x = -2$ no es válida ya que $-2 < 0$ y hemos definido la variación de una función entre dos puntos $x_1$ y $x_2$, siempre con la condición de que $x_1 < x_2$.

c) Este apartado tiene infinitas soluciones correspondientes a puntos que se obtienen cortando la parábola que representa la función dada con cualquier recta horizontal.

Por ejemplo, si cortamos con $y = 0$ obtenemos $x = 0$ y $x = 2$, comprobamos que:

$$f(2) - f(0) = 0 - 0 = 0$$

Si cortamos con $y = 3$ obtenemos:

$$x = 3 \quad \text{y} \quad x = -1$$
$$f(3) - f(-1) = 3 - 3 = 0$$

**2.** ***(Selectividad. Madrid, 1999).*** *Dada la curva de ecuación:*

$$y = -x^3 + 26x$$

*calcula las rectas tangentes a la misma que sean paralelas a la recta de ecuación* $y = -x$.

**Solución**

La recta de ecuación $y = -x$ tiene pendiente $m = -1$. Como $y' = -3x^2 + 26$, por la condición de paralelismo, debe cumplirse:

$$-3x^2 + 26 = -1;\ 3x^2 = 27;\ x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

En el punto de abscisa $x = 3$, $y(3) = -27 + 78 = 51$.

La ecuación de la tangente es:

$$y - 51 = -(x - 3) \Rightarrow x + y - 54 = 0$$

En el punto de abscisa $x = -3$:

$$y(-3) = 27 - 78 = -51$$

La ecuación de la tangente es:

$$y + 51 = -(x + 3) \Rightarrow x + y + 54 = 0$$

**3.** ***(Selectividad. Madrid, 1997).*** *Para la función:*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 1 & \text{si } 2 \le x < 4 \\ 5 & \text{si } 4 \le x \end{cases}$$

*halla la ecuación de la recta tangente cuando* $x = -2$.

**Solución**

La ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x = -2$ es $y - f(-2) = f'(-2)(x + 2)$, donde:

$$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$$

Para determinar $f'(-2)$ calculamos la función derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 2 \\ 2 & \text{si } 2 < x < 4 \\ 0 & \text{si } 4 < x \end{cases}$$

de donde $f'(-2) = 2 \cdot (-2) = -4$.

Luego la ecuación es:

$$y - 5 = -4(x + 2) \Rightarrow 4x + y + 3 = 0$$

**4.** ***(Selectividad. Andalucía, 1997).*** *Dada la función:*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{2} & \text{si } x < -2 \\ -x & \text{si } -2 \le x < 1 \\ x^2 - 3 & \text{si } 1 \le x \end{cases}$$

*Estudia su derivabilidad.*

**Solución**

Estudiaremos la derivabilidad en los puntos en que se unen los tramos que aparecen en la definición de la función, es decir, en $x = -2$ y en $x = 1$.

En el punto de abscisa $x = -2$:

$$f'(-2^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\dfrac{1}{-2 + h} + \dfrac{5}{2} - 2}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\dfrac{1}{h - 2} + \dfrac{1}{2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{2 + h - 2}{2h(h - 2)} = -\frac{1}{4}$$

$$f'(-2^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{2 - h - 2}{h} = -1$$

Como las dos derivadas laterales no coinciden, no es derivable en $x = -2$.

En el punto de abscisa $x = 1$ la función no es derivable ya que los límites laterales son:

$$\lim_{h\to 1^-} f(x) = \lim_{h\to 1^-} (-x) = -1$$

$$\lim_{h\to 1^+} f(x) = \lim_{h\to 1^+} (x^2 - 3) = -2$$

Los límites laterales no coinciden, la función no es continua y, por tanto, no es derivable.

**5.** ***(Selectividad. Murcia, 1996).*** *Encuentra, utilizando la definición de derivada, la de la función:*

$$f(x) = \sqrt[4]{x} \quad \text{en} \quad x_0 = 2$$

**Solución**

$$f'(2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[4]{2+h} - \sqrt[4]{2}}{h} =$$

Para resolver la indeterminación 0/0, multiplicamos numerador y denominador por la expresión conjugada del numerador:

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt[4]{2+h} - \sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{2+h} + \sqrt[4]{2})}{h(\sqrt[4]{2+h} + \sqrt[4]{2})} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{2+h} - \sqrt{2}}{h(\sqrt[4]{2+h} + \sqrt[4]{2})} =$$

Como sigue existiendo indeterminación de la forma 0/0, volvemos a multiplicar por la expresión conjugada del numerador:

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(\sqrt{2+h} - \sqrt{2})(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}{h(\sqrt[4]{2+h} + \sqrt[4]{2})(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h(\sqrt[4]{2+h} + \sqrt[4]{2})(\sqrt{2+h} + \sqrt{2})} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt[4]{2} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{2^3}}$$

**6.** ***(Selectividad. Madrid, 1997).*** *El número de enfermos por gripe en una ciudad a lo largo del pasado mes de enero ha venido dado por la función:*

$$y(t) = 100 + 200e^{0,2t}$$

*donde* t *representa el número de días transcurridos a partir del día 1 de enero de 1996.*

*a) ¿Cuántos enfermos había el citado día 1 de enero?*

*b) Calcula la expresión algebraica de la función que representa la velocidad de evolución del número de enfermos al cabo de* t *días.*

*c) Determina la fecha en la cual la velocidad de evolución del número de enfermos ha sido igual a 803,42 enfermos/día.*

**Solución**

a) $y(0) = 300$ enfermos.

b) $y'(t) = 200 \cdot e^{0,2t} \cdot 0,2 = 40 \cdot e^{0,2t}$

c) $40 \cdot e^{0,2t} = 803,43; \; e^{0,2t} = \dfrac{803,43}{40}$

$$0,2t = \ln \frac{803,43}{40} \Rightarrow t = \frac{\ln \dfrac{803,43}{40}}{0,2} = 15 \text{ días}$$

La fecha pedida corresponde al día 16 de enero.

**7.** ***(Selectividad. Castilla y León, 1998).*** *Se ha lanzado verticalmente hacia arriba una piedra. La altura en metros alcanzada al cabo de* t *segundos viene dada por la expresión:* $f(t) = 20t - 2t^2$.

*a) Halla la velocidad media en el intervalo de tiempo comprendido entre* $t = 0$ *y* $t = 5$.

*b) ¿En algún momento la velocidad de la piedra ha sido de 15 m/s? Si es así, ¿a qué altura sucedió?*

**Solución**

a) $V_m = \dfrac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \dfrac{100 - 50 - 0}{5} = 10$ m/s

b) $f'(t) = 20 - 4t; \; 20 - 4t = 15; \; 4t = 5 \Rightarrow t = 5/4$ s.

En el instante $t = 5/4$ la velocidad fue de 15 m/s, la altura correspondiente fue:

$$f\left(\frac{5}{4}\right) = 20 \cdot \frac{5}{4} - 2 \cdot \frac{25}{16} =$$

$$= 25 - \frac{25}{8} = \frac{175}{8} \text{ metros}$$

**8.** *Utilizando las reglas de derivación, calcula las derivadas de las siguientes funciones:*

*a)* $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

*b)* $y = x \ln x - x$

*c)* $y = \text{sen } 2x \cdot \cos x^2$

*d)* $y = \dfrac{1}{4} \text{tg}^4 x - \text{tg}^2 x$

**Solución**

a) $y' = \dfrac{x^2 + 1 - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \dfrac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

b) $y' = \ln x + x \cdot \dfrac{1}{x} - 1 = \ln x$

c) $y' = \cos 2x \cdot 2 \cdot \cos x^2 + \text{sen } 2x \cdot (-\text{sen } x^2) \cdot 2x =$
$= 2 \cos 2x \cdot \cos x^2 - 2x \cdot \text{sen } 2x \cdot \text{sen } x^2$

d) $y' = \dfrac{1}{4} \cdot 4 \cdot \text{tg}^3 x \cdot (1 + \text{tg}^2 x) - 2 \text{ tg } x(1 + \text{tg}^2 x) =$
$= \text{tg}^3 x + \text{tg}^5 x - 2 \text{ tg } x - 2 \text{ tg}^3 x =$
$= \text{tg}^5 x - \text{tg}^3 x - 2 \text{ tg } x$

**9.** *Deduce, utilizando la definición de derivada, la función derivada de* $f(x) = \sqrt{x}$.

**Solución**

Empleamos la regla de los cuatro pasos:

1. $f(x+h) = \sqrt{x+h}$
2. $f(x+h) - f(x) = \sqrt{x+h} - \sqrt{x}$
3. $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$
4. $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = (*)$$

Para calcular este límite multiplicamos el numerador y el denominador por la expresión conjugada del numerador:

$$(*) \ = \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

**10.** *Deriva y simplifica:*

$$y = \ln \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$$

**Solución**

Utilizando las propiedades de los logaritmos:

$$y = \frac{1}{2}[\ln(1 + \cos x) - \ln(1 - \cos x)]$$

Derivando:

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{-\text{sen } x}{1 + \cos x} - \frac{\text{sen } x}{1 - \cos x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-\text{sen } x + \text{sen } x \cos x - \text{sen } x - \text{sen } x \cos x}{1 - \cos^2 x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-2 \text{ sen } x}{\text{sen}^2 x}\right) = -\frac{1}{\text{sen } x}$$

**11.** *Calcula la derivada de* $y = x^{\cos x}$.

**Solución**

Utilizaremos el método de derivación logarítmica, para lo cual tomamos logaritmos en los dos miembros y derivamos:

$$\ln y = \ln x^{\cos x} = \cos x \cdot \ln x$$

$$\frac{y'}{y} = -\text{sen } x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x}$$

$$y' = x^{\cos x}\left(-\text{sen } x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x}\right)$$

**12.** ***(Selectividad. Andalucía, 1999)****. Calcula las funciones derivadas de las siguientes funciones, simplificando su expresión cuando sea posible:*

*a)* $f(x) = \dfrac{1 - 3x}{x^3}$ *para* $x \neq 0$

*b)* $g(x) = \dfrac{1}{3}\ln(4x)$ *para* $x > 0$

*c)* $h(x) = \cos x \cdot \text{sen } x$ *para* $x \in \mathbb{R}$

**Solución**

a) $f'(x) = \dfrac{x^3(-3) - (1 - 3x)3x^2}{x^6} =$

$$= \frac{-3x^3 - 3x^2 + 9x^3}{x^6} = \frac{6x^3 - 3x^2}{x^6} = \frac{6x - 3}{x^4}$$

b) $g'(x) = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{4}{4x} = \dfrac{1}{3x}$

c) $h'(x) = -\text{sen } x \cdot \text{sen } x + \cos x \cdot \cos x =$

$$= \cos^2 x - \text{sen}^2 x = \cos 2x$$

**13.** *Calcula las derivadas primera, segunda y tercera de la función:*

$$y = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

*¿Cuál es la expresión de la derivada* n*-ésima?*

**Solución**

$$y' = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$y'' = \frac{2(x-1)}{(x-1)^4} + \frac{2(x+1)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{2}{(x+1)^3}$$

$$y''' = -\frac{2 \cdot 3(x-1)^2}{(x-1)^6} - \frac{2 \cdot 3(x+1)^2}{(x+1)^6} =$$

$$= -\frac{2 \cdot 3}{(x-1)^4} - \frac{2 \cdot 3}{(x+1)^4}$$

En las derivadas sucesivas se observan ciertas regularidades en los signos, las potencias del denominador y las expresiones del numerador.

La derivada de orden $n$ tiene por expresión:

$$f^{n)}(x) = (-1)^n \frac{n!}{(x-1)^{n+1}} + (-1)^n \frac{n!}{(x+1)^{n+1}}$$

**14.** *Calcula el valor de la derivada de la función* $y = \ln x^x$ *en el punto* $x = e$.

**Solución**

Aplicamos las propiedades de los logaritmos y las reglas de la derivación:

$$y = \ln x^x = x \cdot \ln x; \ y' = \ln x + \frac{x}{x} = \ln x + 1$$

Para $x = e$; $y'(e) = \ln e + 1 = 1 + 1 = 2$.

**15.** *Calcula el valor de la derivada de la función* $y = e^{sen\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} + e^{cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}$, *en el punto* $x = \dfrac{3\pi}{2}$.

**Solución**

Calculamos la función derivada:

$$y' = e^{\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + $$
$$+ e^{\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)} \left[-\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

de donde:

$$y'\left(\frac{3\pi}{2}\right) = e^{\text{sen } 2\pi} \cos 2\pi + e^{\cos 2\pi} (-\text{sen } 2\pi) =$$
$$= e^0 \cdot 1 + e^1 \cdot 0 = 1$$

**16.** ***(Selectividad. Salamanca, 1996).*** *Calcula los puntos en los que la tangente a la curva:*

$$y = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 1$$

*es paralela a la recta* $y = 5x + 3$.

**Solución**

Como la recta dada tiene pendiente $m = 5$, los puntos que buscamos son aquellos en los que la derivada de la función toma el valor 5:

$$y' = x^2 - 2x - 3; \quad x^2 - 2x - 3 = 5$$
$$x^2 - 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ y } x = 4$$

Sustituyendo en la ecuación de la curva:

$$y(-2) = \frac{-8}{3} - 4 + 6 + 1 = \frac{1}{3}$$
$$y(4) = \frac{64}{3} - 16 - 12 + 1 = \frac{-17}{3}$$

Los puntos son: $\left(-2, \dfrac{1}{3}\right)$ y $\left(4, \dfrac{-17}{3}\right)$

**17.** *Dada la curva* $y = \dfrac{x}{1 - x^2}$, *calcula:*

a) *Las coordenadas de los puntos de la misma, en los que las tangentes forman un ángulo de 45° con la parte positiva del eje de abscisas.*

b) *La ecuación de la tangente en el punto de abscisa* $x = \sqrt{3}$.

c) *La ecuación de la normal a la curva en dicho punto.*

**Solución**

a) Si las tangentes en los puntos de la curva forman un ángulo de 45° con la parte positiva de $OX$, la derivada en dichos puntos vale 1, ya que tg 45° = 1.

La función derivada es:

$$y' = \frac{1 - x^2 - x(-2x)}{(1 - x^2)^2} = \frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2}$$

que igualando a 1:

$$\frac{1 + x^2}{(1 - x^2)^2} = 1$$
$$1 + x^2 = 1 - 2x^2 + x^4$$
$$x^4 - 3x^2 = 0; \; x^2(x^2 - 3) = 0$$
$$x = 0 \text{ doble}; \; x = \sqrt{3}; \; x = -\sqrt{3}$$

los puntos son:

$$(0, 0), \left(\sqrt{3}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ y } \left(-\sqrt{3}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

b) En el punto $\left(\sqrt{3}, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$, la ecuación de la tangente es:

$$y + \frac{\sqrt{3}}{2} = x - \sqrt{3}$$

c) La ecuación de la normal debe tener como pendiente $-1$, luego será:

$$y + \frac{\sqrt{3}}{2} = -(x - \sqrt{3})$$

**18.** *Halla una función polinómica de segundo grado sabiendo que pasa por el punto (3, 4) y que la pendiente de la tangente en el punto (−1, 1) vale 1.*

**Solución**

La forma general de una función polinómica de segundo grado es:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Para determinar los coeficientes $a$, $b$ y $c$, imponemos las condiciones conocidas.

Por pasar por el punto (3, 4), debe cumplir:

$$f(3) = 9a + 3b + c = 4$$

Por pasar por (−1, 1):

$$f(-1) = a - b + c = 1$$

Por ser la pendiente de la tangente en el punto (−1, 1) igual a 1 debe cumplir:

$$f'(-1) = 1$$

Calculamos la función derivada:

$$f'(x) = 2ax + b$$
$$f'(-1) = -2a + b = 1$$

Tenemos un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas:

$$\left.\begin{aligned} 9a + 3b + c &= 4 \\ a - b + c &= 1 \\ -2a + b &= 1 \end{aligned}\right\}$$

cuya solución es:

$$a = -\frac{1}{16}, \quad b = \frac{7}{8}, \quad c = \frac{31}{16}$$

Luego, la función buscada es:

$$f(x) = -\frac{1}{16}x^2 + \frac{7}{8}x + \frac{31}{16}$$