

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. (Selectividad. La Laguna, 1997). El número de personas atacadas cada día por una determinada enfermedad viene dado por la función:

$$f(x) = -x^2 + 40x + 84$$

donde x representa el número de días transcurridos desde que se descubrió la enfermedad. Calcula:

- El número de días que deben transcurrir para que desaparezca la enfermedad.
 - La tasa de propagación de la enfermedad al cabo de cinco días.
 - El momento en que la enfermedad deja de crecer.
2. Dada la función $f(x) = 1 - x + x^2$:

- Calcula $f'(2)$ mediante límites.
- ¿Qué significado tiene $f'(2)$?

Halla el punto de corte de la recta tangente a la curva en $x = 2$, con el eje OX .

3. Dada la función $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ (x-1)^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

- Calcula su dominio y dibuja su gráfica.
- Define la función $f(x)$ en $x = 1$ para que sea continua en ese punto.
- Dándole a $f(1)$ el valor del apartado anterior, ver si $f(x)$ es derivable en $x = 1$.

4. (Selectividad. Andalucía, 1999). Estudia la derivabilidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x < -1 \\ 2x + 2 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 8x & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

5. Dada la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$, halla la ecuación de la tangente en el punto en el que ésta sea paralela a la secante que la corta en los puntos de abscisas $x = 0$ y $x = 2$.

6. (Selectividad. León, 1995). Representa gráficamente la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 2 \\ 2x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

y estudia la continuidad y la derivabilidad de dicha función en el punto $x = 2$.

7. (Selectividad. Castilla y León, 1998). Estudia la derivabilidad de la función:

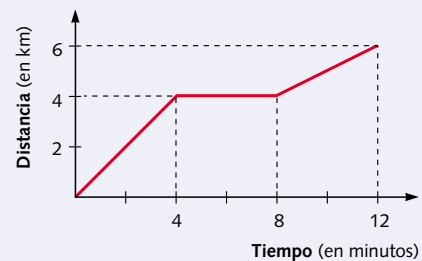
$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ -x + 1 & \text{si } x \in [0, 2] \\ x^2 - 4x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

8. Calcula el ángulo que forma la recta tangente a la función $f(x) = 3x^2 - 6x + 15$ en el punto $x = 2$ con el eje OX .

9. Halla las derivadas de las funciones siguientes, en los puntos que se indican, utilizando la definición:

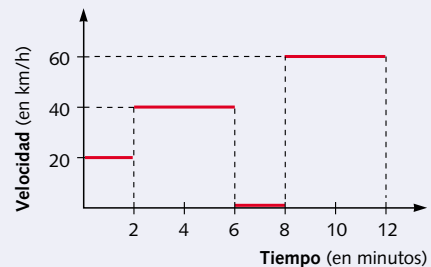
- $f(x) = 4x - 2$, en $x = 3$
- $f(x) = x^2 - x + 1$, en $x = 1$
- $f(x) = 12 - x - x^2$, en $x = 0$
- $f(x) = |x + 3|$, en $x = 5$

10. La gráfica adjunta representa el recorrido de un conductor a lo largo de 12 minutos.



Dibuja la gráfica de la función velocidad.

11. La gráfica adjunta representa la velocidad en km/h del recorrido de un conductor a lo largo de 12 minutos.



Dibuja la gráfica de la función espacio.

12. (Selectividad. UNED, 1994). Dada la función:

$$f(x) = a + ax - \frac{x}{b-x}$$

determina las constantes a y b para que la recta de ecuación $y - x - 2 = 0$ sea tangente a la gráfica de la función en el punto $(0, f(0))$.

13. (Selectividad. Baleares, 1994). La función que determina la curva de demanda de un producto es $f(x) = -2x + 16$, donde x es la cantidad de producto fabricado por unidad de tiempo y $f(x)$ es el precio en dólares por unidad. Se define el ingreso total como el producto $x \cdot f(x)$.

Dibuja, en el primer cuadrante, las funciones $f(x)$ y $g(x) = x \cdot f(x)$. Halla el punto de intersección y determina el ingreso total máximo. Si el ingreso total del producto aumenta de 14 a 24 dólares, antes de llegar al ingreso total máximo, ¿en qué cantidad aumenta el producto fabricado por unidad de tiempo y en qué cantidad disminuye el precio del producto?

14. Determina, utilizando la regla de los cuatro pasos, la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 2x^2 + 3x$

b) $f(x) = \frac{1}{3x + 1}$

15. (Selectividad. Andalucía, 1998). Calcula las funciones derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{2x^3}{\cos x}$

b) $g(x) = \frac{2}{3} \ln(5x)$

c) $h(x) = \frac{1}{2} e^{5x-3}$

16. Calcula y simplifica las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = \ln \sqrt{\frac{1 + \operatorname{sen} x}{1 - \operatorname{sen} x}}$

b) $y = \ln(\operatorname{arc} \operatorname{tg} x^2)$

c) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{1}{x}\right)$

d) $y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 - a^2})$

e) $y = \ln\left(\cos \frac{x^2}{2}\right)$

17. Deriva y simplifica las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{a^2 - x^2} + \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{x}{a}$

b) $y = \ln \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x} + \operatorname{arc} \operatorname{tg} x$

c) $y = \left(\frac{x}{a}\right)^x$

d) $y = (2-x)^x$

e) $y = e^{\sqrt{x}}$

18. Utilizando el método de derivación logarítmica calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $y = x^{\ln x}$

c) $y = (\ln x)^x$

b) $y = x^{x^2}$

d) $y = x^{x^x}$

19. Halla los valores de las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $y = \sqrt{(1-x^2)^3}$ en $x = \frac{1}{2}$

b) $y = \frac{4}{3}(x^3 + x - 3)$ en $x = \frac{1}{2}$

c) $y = 5x^2 + 2\sqrt{x^2 + 1}$ en $x = 0$

d) $y = \frac{x^2 + 8x + 7}{x + 2}$ en los puntos en los que se anula la función.

e) $y = \frac{e^x + e^{2x}}{3}$ en $x = 1$

20. (Selectividad. Cataluña, 1997). Considera la función $f(x) = x(x-1)(x-2)$ definida en \mathbb{R} .

a) Determina el valor de la pendiente de la recta tangente en los ceros de $f(x)$. Esboza la gráfica de la función.

b) Comprueba que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene dos raíces reales sin determinar explícitamente dichas raíces.

21. Calcula la expresión de la derivada de orden n de la función $y = e^{2x}$.

22. Halla la ecuación de la tangente a la curva $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 - 1}$ en el punto de abscisa $x = 2$.

23. Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \operatorname{sen} x$ en los puntos de abscisas 0 y π .

24. La gráfica de la función $y = ax^2 + bx + c$ pasa por los puntos $A(2, 3)$ y $B(3, 13)$, siendo la tangente a la misma en el punto de abscisa 1 paralela a la bisectriz del primer cuadrante. Halla el valor de los coeficientes a , b y c .

25. Halla las ecuaciones de las tangentes a la curva $y = \frac{x^2}{2} - x + \frac{3}{2}$ en los puntos en los que su ordenada es igual a su abscisa.

26. Dada la función $y = ax^2 + bx + c$, en la cual a , b y c son constantes, determina el valor de dichas constantes, sabiendo que la función vale 4 para $x = 1$, su derivada primera vale 5 para $x = 1$, y su derivada segunda vale 4 .

27. ¿En qué punto de la curva $y = \frac{x}{1-x^2}$ su tangente tiene una inclinación de 45° respecto al semieje positivo de OX ?