



Control 3:

| | | | |
|--------|--|-------|--|
| Nombre | | Grupo | |
|--------|--|-------|--|

1.-) Calcula el determinante de la matriz A explicando los pasos que das para su cálculo. $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

Antes de desarrollar el determinante, voy a "hacer ceros" en, por ejemplo, la primera fila. Para ello restaré a la primera y segunda columnas el doble de la cuarta. ($C_1 \rightarrow C_1 - 2C_3$; $C_2 \rightarrow C_2 - 2C_3$) Lo que deja invariante el determinante porque sólo he sumado otra columna. Para terminar, desarrollo el determinante por la primera fila.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ -5 & -6 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & -2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -6 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-1)(10 - 24 + 18 + 8 + 24 + 15) = -51$$

2.-) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ m & 1 & 1 \\ 0 & m & 2 \end{pmatrix}$ encuentra todos los valores de "n" para los que posea inversa. Calcula dicha inversa, si

existe, para el caso $n = -1$ empleando adjuntos.

Para que posea inversa el determinante debe ser distinto de cero.

Primero calculo el determinante: $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ m & 1 & 1 \\ 0 & m & 2 \end{vmatrix} = 6 + 0 + 0 - 0 - 2m - 3m = 6 - 5m$

Igualo a cero para encontrar los valores para los que NO existe inversa : $6 - 5m = 0 \rightarrow m = 6/5$

Conclusión: A posee inversa para cualquier valor de m distinto de 6/5.

En particular, para $m = -1$ $|A| = 6 - 5 \cdot (-1) = 11$ $A^{-1} = \frac{1}{|A|} Adj(A)^T = \frac{1}{11} Adj(A)^T$

Calculemos la matriz adjunta de $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 & A_{12} &= (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 & A_{13} &= (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \\ A_{21} &= (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 & A_{22} &= (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 & A_{23} &= (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 \\ A_{31} &= (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 & A_{32} &= (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3 & A_{33} &= (-1)^6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \end{aligned}$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & 6 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix} \quad Adj(A)^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 6 & -3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

| | | | | | |
|-------------|----------|---------------|------------|------------|------------|
| Ejercicio: | 1.) | 2.-) | 3.-) | 4.-) | 5.) |
| Puntuación: | 2 puntos | 3,5 = 1,5 + 2 | 1,5 puntos | 1,5 puntos | 1,5 puntos |

3.-) Encuentra el valor positivo de x que verifica esta ecuación:
$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & x \\ 5 & 2x & 7 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} = 5x + 6$$

Desarrollamos el determinante y lo igualamos a la expresión dada:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & x \\ 5 & 2x & 7 \\ -1 & 3 & x \end{vmatrix} = 6x^2 + 7 + 15x + 2x^2 + 5x - 63 = 8x^2 + 20x - 56$$

$$8x^2 + 20x - 56 = 5x + 6 \quad \rightarrow \quad 8x^2 + 15x - 62 = 0$$

$$x = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-62)}}{2 \cdot 8} = \frac{-15 \pm \sqrt{225 - 4 \cdot 8 \cdot (-62)}}{16} = \frac{-15 \pm 47}{16} = \frac{-62}{16} = \frac{-31}{8}$$

La solución es x=2

4.-) Sabiendo que $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 7$ calcula paso a paso y sin desarrollar el siguiente determinante explicando la propiedad que empleas en cada

ocasión:
$$\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix}$$

Como la segunda fila es suma de dos, descompongo el determinante como suma de dos

$$\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f+c & d+a & e+b \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f & d & e \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ c & a & b \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix}$$

De ellos, en el segundo, la segunda y tercera filas son proporcionales, luego su valor es cero:

$$\begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f & d & e \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ c & a & b \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f & d & e \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix} + 0 = \begin{vmatrix} -i & -g & -h \\ f & d & e \\ 3c & 3a & 3b \end{vmatrix}$$

En el determinante resultante, la tercera fila está multiplicada por 3 y la primera por -1, luego los puedo sacar como factores

comunes obteniendo
$$-3 \begin{vmatrix} i & g & h \\ f & d & e \\ c & a & b \end{vmatrix}$$

Ahora cambio: (la 1ª columna con la 2ª) después (la 2ª columna con la 3ª) y finalmente (la 1ª fila con la 3ª) con lo que obtengo el determinante inicial afectado por los siguientes cambios de signo:

$$\begin{vmatrix} i & g & h \\ f & d & e \\ c & a & b \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1) \begin{vmatrix} g & i & h \\ d & f & e \\ a & c & b \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1) \cdot (-1) \begin{vmatrix} g & h & i \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} \leftarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 7 = 21$$

5.-) Calcula **justificadamente** el rango de la siguiente matriz: $\begin{pmatrix} -2 & 6 & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ 3 & -9 & \mathbf{-6} & \mathbf{1} \\ 1 & -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$

El rango es al menos 1 por no ser una matriz nula y a lo sumo será 3.

Podemos encontrar un menor de orden 2 no nulo tomando las dos primeras filas y las dos últimas columnas (en negrita):

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -6 & 1 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$$

Si observamos que la tercera fila es suma de las dos anteriores, sabremos que el rango no puede ser tres, luego el rango es 2.

Si no nos damos cuenta de esto, tendríamos que intentar ampliar esas dos columnas con otra para formar un determinante de orden 3. Las opciones son:

$$\begin{vmatrix} -2 & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ 3 & \mathbf{-6} & \mathbf{1} \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{o bien} \quad \begin{vmatrix} 6 & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ -9 & \mathbf{-6} & \mathbf{1} \\ -3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{con lo que el rango es 2 (En otros modelos de examen sí se obtiene rango 3)}$$

Aun tenemos otro método: Gauss

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ 3 & -9 & \mathbf{-6} & \mathbf{1} \\ 1 & -3 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_1+2F_3 \\ 3F_1+2F_2}]{F_1+2F_3} \begin{pmatrix} -2 & 6 & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-F_3} \begin{pmatrix} -2 & 6 & \mathbf{4} & \mathbf{3} \\ 0 & 0 & 0 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ que evidentemente tiene rango 2}$$

