Fecha :........../............/..........

Nombre		Grupo	

1.-) ELIGE UNO de estos apartados y simplifica tanto como sea posible. (0,75 puntos)

a) $$\frac{2^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{9}}{3^{\frac{-1}{2}}\cdot 4^{\frac{1}{3}}} \underset{\substack{\text{Expreso como potencias}\\ \text{con la misma base}}}{=} \frac{2^{\frac{3}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{-1}{2}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}} \underset{\substack{\text{Denominador común}\\ \text{de exponentes (índice}\\ \text{común)}}}{=} \frac{2^{\frac{9}{6}}\cdot 2^{\frac{2}{6}}\cdot 3^{\frac{4}{6}}}{3^{\frac{-3}{6}}\cdot 2^{\frac{4}{6}}} \underset{\substack{\text{Opero potencias}\\ \text{con misma base}}}{=} 2^{\frac{7}{6}}\cdot 3^{\frac{7}{6}} \underset{\substack{\text{Opero potencias}\\ \text{con mismo exp}}}{=} 6^{\frac{7}{6}} = \sqrt[6]{6^7}$$

---

b) $$-3\frac{\sqrt{45}}{\sqrt{3}} - \sqrt{375} - 8\sqrt{1500} + \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = -3\sqrt{15} - \sqrt{3\cdot 5^3} - 8\sqrt{3\cdot 5^3\cdot 2^2} + \sqrt{4} =$$

$$= -3\sqrt{15} - 5\sqrt{3\cdot 5} - 8\cdot 5\cdot 2\sqrt{3\cdot 5} + 2 = -88\sqrt{15} + 2$$

2.-) Calcula el valor de la siguiente expresión utilizando las propiedades de los logaritmos:

$$\log_3 \frac{3^4\cdot\sqrt{243}}{81} = \log_3 \frac{\cancel{3}^4\cdot\sqrt{3^5}}{\cancel{3}^4} = \log_3 3^{\frac{5}{2}} = \frac{5}{2}\log_3 3 = \boxed{\frac{5}{2}}$$ (1 punto)

3.-) ELIGE UN APARTADO y resuélvelo: (1,5 puntos)

a) $$\begin{cases} 2\log x - 3\log y = 7 \\ \log x + 4\log y = -2 \end{cases} \xrightarrow[\cdot(-2)]{\textit{reducción}} \begin{cases} 2\log x - 3\log y = 7 \\ -2\log - 8\log y = 4 \end{cases} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{10}}$$

$$-11\cdot\log y = 11 \quad\Rightarrow\quad \log y = -1$$

Sustituyendo en la 2ª ecuación $\Rightarrow \log x + 4\cdot(-1) = -2 \Rightarrow \log x = 2 \Rightarrow \boxed{x = 100}$

b) $$2^{2x-1} + 6\cdot 2^{x-1} + 8 = 0 \quad\rightarrow\quad \frac{2^{2x}}{2} + \frac{6\cdot 2^x}{2} + 8 = 0 \quad\rightarrow 2^{2x} + 6\cdot 2^x + 16 = 0$$ cambio de variable: $\begin{matrix} 2^x = t \\ 2^{2x} = t^2 \end{matrix}$

$\boxed{t^2 + 6t + 16 = 0}$ Pero esta ecuación NO tiene soluciones reales.(Discriminante negativo)

4.-) Representa en la recta real los números que verifican la siguiente inecuación y exprésalos usando notación de intervalos. x4 + 6x ≥ x2(2x +5). (1,25 puntos)

$$x^4 + 6x \geq 2x^3 + 5x^2 \quad\rightarrow\quad x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 6x \geq 0 \xrightarrow[\textit{factorizo}]{} x(x^3 - 2x^2 - 5x + 6) \geq 0$$

Sigo factorizando usando Ruffini.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -2 & -5 & 6 \\ 1 & & 1 & -1 & -6 \\ \hline & 1 & -1 & -6 & \lfloor 0 \\ 3 & & 3 & 6 & \\ \hline & 1 & 2 & \lfloor 0 & \end{array}$$

$\xrightarrow{\text{Queda el polinomio factorizado como}} \boxed{x(x-1)(x-3)(x+2) \geq 0}$

Los puntos clave son pues x = -2 ; x = 0 ; x = 1 y x = 3

Intervalo / factor	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2,0)$	0	(0,1)	1	(1,3)	3	$(3, \infty)$
(x+2)	–	0	+	+	+	+	+	+	+
x	–	–	–	0	+	+	+	+	+
(x+1)	–	–	–	–	–	0	+	+	+
(x+3)	–	–	–	–	–	–	–	0	+
x(x+2) (x-1) (x-3)	**+**	**0**	**-**	**0**	**+**	**0**	**–**	**0**	**+**

Conjunto solución: . $\boxed{.\quad [-\infty,-2] \cup [0,1] \cup [3, \infty]\quad .}$

5.-) Resuelve el siguiente sistema empleando el método de Gauss:

$$\begin{cases} 2x+4y+2z=3-z \\ 2\cdot(5x-4y)-9z=0 \\ 4(x+y)=2+3z \end{cases} \quad \begin{cases} 2x+4y+3z=3 \\ 10x-8y-9z=0 \xrightarrow{5F_1-F_2} \\ 4x+4y-3z=2 \xrightarrow{2F_1-F_3} \end{cases} \begin{cases} 2x+4y+3z=3 \\ 28y+24z=15 \\ 4y+9z=4 \xrightarrow{F_2-7F_3} \end{cases} \begin{cases} 2x+4y+3z=3 \\ 28y-24z=15 \\ \text{-39}z=-13 \end{cases}$$

$$\boxed{z=\frac{-13}{-39}=\frac{1}{3}} \rightarrow 28\text{y}+24\cdot\frac{1}{3}=15 \Rightarrow 28y=7 \Rightarrow \boxed{y=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}} \rightarrow 2\text{x}+4\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{3}=3 \Rightarrow 2x=1 \Rightarrow \boxed{x=\frac{1}{2}}$$

(Al final añado la versión con “matrices de coeficientes”) (1 punto)

6.-) Resuelve el siguiente sistema

$$\begin{cases} x^2+5y^2+2x=23 \\ x-y=1+y \end{cases} \xrightarrow[\text{Despejo x}]{} x=1+2y \xrightarrow[\text{Sustituyo en la primera y resuelvo}]{} (1+2y)^2+5y^2+2\cdot(1+2y)=23$$

$$1+4y^2+4y+5y^2+2+4y=23 \quad \rightarrow \quad 9y^2+8y-20=0 \quad \rightarrow \text{y}=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4\cdot 9(-20)}}{2\cdot 9}=\left\langle \begin{array}{l} -2 \\ 10/9 \end{array}\right.$$

$y=-2 \Rightarrow x=1+2\cdot(-2)=-3$ Solución 1: $\boxed{y=-2; x=-3}$

$y=10/9 \Rightarrow x=1+2\cdot 10/9=29/9$ Solución 2: $\boxed{y=10/9; x=29/9}$

(1 punto)

7.-) Dados los números complejos z = 3 + 2i y w = -5 -2i expresa $\frac{z}{w}$ en forma binómica y polar.

(1)

$$\frac{z}{w}=\frac{3+2i}{-5-2i} \underset{\text{Multiplico y divido por el conjugado del denominador}}{=} \frac{(3+2i)(-5+2i)}{(-5-2i)(-5+2i)}=\frac{-15+6i-10i+4i^2}{25-10i+10i-4i^2} \underset{\text{Como } i^2=-1}{=} \frac{-19-4i}{25+4}=\boxed{\frac{-19-4i}{29}}$$

Para expresarlo en polar ahora basta dar el módulo = $\sqrt{\frac{19^2+4^2}{29^2}}=\frac{\sqrt{377}}{29}$ y el argumento, que es

$Arc\tan\left(\frac{-4/29}{-19/29}\right)=Arc\tan\left(\frac{4}{19}\right)=11,888+180^{\circ}=191,888^{\circ}$. Por tanto es : $\boxed{\frac{z}{w}=\left(\frac{\sqrt{377}}{29}\right)_{191,88^{\circ}}}$

8.-) Encuentra todos los ángulos que son solución de 3Cos(2x) + 6Cos(x) = 0. (1,5 puntos)

Usando la fórmula del coseno del ángulo doble. $3(Cos^2(x) - Sen^2(x)) + 6Cos(x) = 0$

$$3Cos^2(x) - 3Sen^2(x) + 6Cos(x) = 0$$

Usando la ecuación fundamental $Cos^2(x) + Sen^2(x) = 1$ Podemos reescribir $Sen^2(x) = 1 - Cos^2(x)$

$3Cos^2(x) - 3(1 - Cos^2(x)) + 6Cos(x) = 0 \rightarrow 3Cos^2(x) - 3 + 3Cos^2(x) + 6Cos(x) = 0 \rightarrow$
$6Cos^2(x) + 6Cos(x) - 3 = 0$

Haciendo el cambio de variable Cos(x) = t tenemos $6t^2+6t-3 = 0$ cuyas soluciones son

$$Cos(x)=t=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot 6\cdot(-3)}}{2\cdot 6}=\begin{cases}\frac{-6+\sqrt{108}}{12}\simeq 0,366\Rightarrow ArcCos(0,366)=68,52^{\circ}\ \text{ y }\ -68,52^{\circ}\\[2ex] \frac{-6-\sqrt{108}}{12}<-1\Rightarrow \text{no válida}\end{cases}$$

Estas dos son las soluciones "fundamentales". También lo serían cualquiera de ellas más un múltiplo entero de 360º

9.-) Calcula el ángulo que forman los ángulos $\vec{u}=(3,2)\quad;\quad \vec{v}=(-5,-2)$ **(1 punto)**

Si α es el ángulo que forman, entonces $Cos(\alpha)=\frac{<u,v>}{|u|\cdot|v|}=\frac{u_1v_1+u_2v_2}{\sqrt{u_1^2+u_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2+v_2^2}}=\frac{3\cdot(-5)+2\cdot(-2)}{\sqrt{9+4}\cdot\sqrt{25+4}}=$

$$=\frac{19}{\sqrt{13\cdot 29}}=\frac{19}{\sqrt{377}}\simeq 0,978549\qquad\Rightarrow ArcCos(0,978549)=\boxed{11,88^{\circ}}$$

2ª versión del de Gauss:

$$\begin{cases}2x+4y+2z=3-z\\ 2\cdot(5x-4y)-9z=0\\ 4(x+y)=2+3z\end{cases}\quad \left(\begin{array}{ccc|c}2&4&3&3\\10&-8&-9&0\\4&4&-3&2\end{array}\right)\begin{array}{c}\\ \xrightarrow{5F_1-F_2}\\ \xrightarrow{2F_1-F_3}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|c}2&4&3&3\\0&28&24&15\\0&4&9&4\end{array}\right)\xrightarrow{F_2-7F_3}\left(\begin{array}{ccc|c}2&4&3&3\\0&28&24&15\\0&0&-39&-13\end{array}\right)$$

$$\boxed{z=\frac{-13}{-39}=\frac{1}{3}}\quad\rightarrow\quad 28y+24\cdot\frac{1}{3}=15\Rightarrow 28y=7\Rightarrow\boxed{y=\frac{7}{28}=\frac{1}{4}}\quad\rightarrow\quad 2x+4\cdot\frac{1}{4}+3\cdot\frac{1}{3}=3\Rightarrow 2x=1\Rightarrow\boxed{x=\frac{1}{2}}$$