

FAMILIA DE FUNCIONES: POLÍNÓMICAS $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$

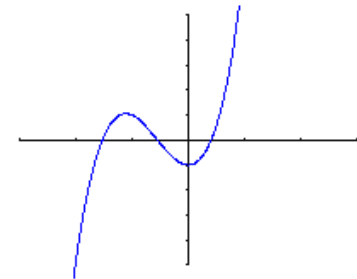
Dominio: \mathbb{R}

Recorrido: \rightarrow Si el grado es impar: $\text{Rec}(f) = \mathbb{R}$

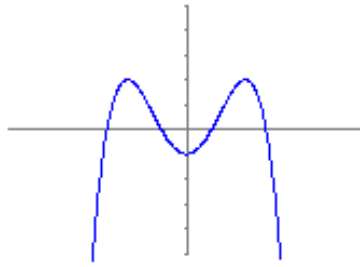
\rightarrow Si el grado es par : $\text{Rec}(f)$ es de la forma $[a, +\infty)$ si a_n es positivo o bien $(-\infty, a]$ si a_n es negativo

Asíntotas: No tiene ni verticales ni horizontales ni oblicuas (salvo que la función sea en sí misma una recta \Rightarrow grados 0 ó 1)

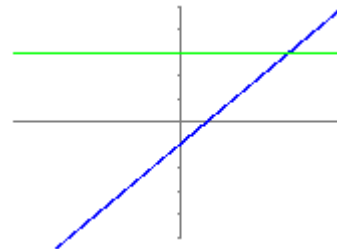
Continuidad: Son continuas en todo \mathbb{R}



$$f(x) = 3x^3 + 5x^2 - 1$$



$$g(x) = -3x^4 + 6x^2 - 1$$



$$h(x) = 2x - 1 \quad m(x) = 3$$

FAMILIA DE FUNCIONES: RADICALES $F(x) = \sqrt[n]{f(x)}$ donde $f(x)$ es otra función.

Sus propiedades dependen muchíiiiisimo de las de $f(x)$, por lo que debemos saber manejar $f(x)$

Dominio:

Si el **índice es impar**, siempre existirá la raíz y por tanto el dominio coincide con el de $f(x)$

Si el **índice es par**, necesitaremos que $f(x) \geq 0$ y por tanto el dominio serán “los puntos del dominio de $f(x)$ en los que además $f(x) \geq 0$ ”

Recorrido:

Depende de cómo sea $f(x)$, pero si el índice es par, entonces siempre estará contenido en los valores positivos de “y” (salvo que la raíz esté afectada por un signo “-“)

Asíntotas:

Verticales: Sólo donde las tenga $f(x)$

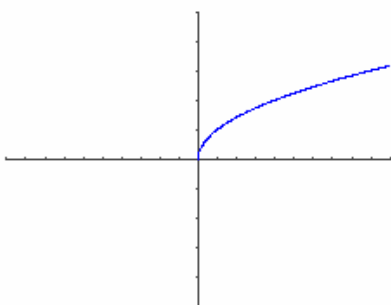
Horizontales: Sólo si las tiene $f(x)$

Oblicuas: **Depende** de cómo sea $f(x)$

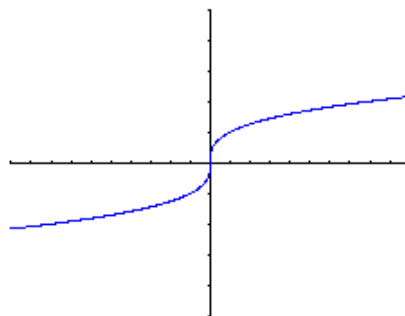
Continuidad:

Si $f(x)$ es continua y el dominio de $F(x)$ es “conexo”, entonces será continua.

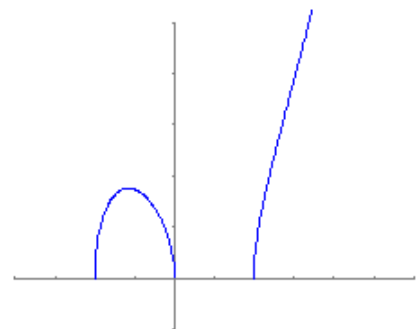
Ejemplos:



$$f(x) = \sqrt{x}$$



$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$



$$f(x) = \sqrt{x^3 - 4x}$$

FAMILIA DE FUNCIONES: RACIONALES $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}$

Dominio: Todo \mathbb{R} menos los puntos donde se anule el denominador. Para determinar esos puntos que “debemos quitar”, tendremos que resolver la ecuación $Q(x) = 0$ ($\mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} / Q(x) = 0\}$)

Recorrido: (Depende de cada caso)

Asíntotas:

Verticales: Puede tener en los puntos que no pertenecen al dominio. (pero puede suceder que no tenga)

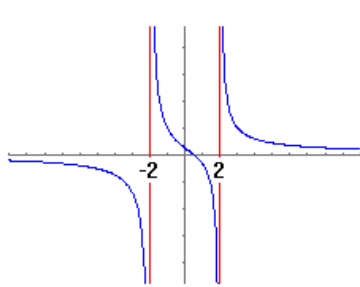
Horizontales: Solo si el numerador y el denominador tienen el mismo grado y estará a altura $y = \frac{a_n}{b_m}$ o si el numerador tiene grado menor que el denominador, que estará a altura $y = 0$.

Oblicuas: Es necesario que el grado del numerador sea una unidad mayor que el del denominador. Si hacemos la división P/Q y obtenemos $f(x) = mx + n + \frac{P_1(x)}{Q(x)}$ con grado de P_1 menor que grado de Q , la recta $y = mx + n$ será asíntota oblicua. (Veremos otro método más general usando límites)

Continuidad: Pueden presentar discontinuidades de dos tipos:

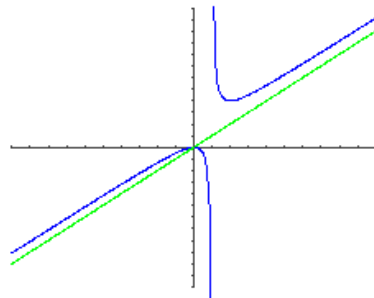
Evitable: En los puntos fuera del dominio para los que existe el límite.

De salto infinito: En los puntos fuera del dominio en los que el límite es de la forma $\frac{a}{0}$ (en esos puntos habrá asíntotas verticales)

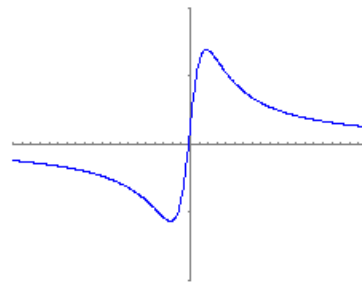


Discontinuidades aisladas

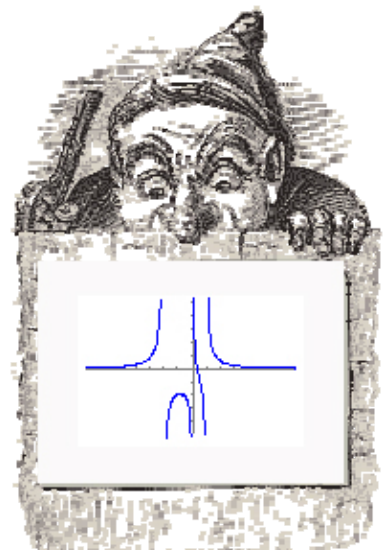
$$f(x) = \frac{2x-1}{x^2-4}$$



$$g(x) = \frac{x^2}{x-1}$$



$$h(x) = \frac{5x+1}{x^2+4}$$



FAMILIA DE FUNCIONES: EXPONENCIALES $f(x) = a^x$ “a” es un número POSITIVO fijo distinto de 1.

Nota: Es especialmente relevante la función $f(x) = e^x$
($e \approx 2,718281828\dots$ = número de Euler)

Dominio: Todo \mathbb{R}

Recorrido: $(0, \infty)$ (positiva y no nula)

Asíntotas: Solo horizontal :

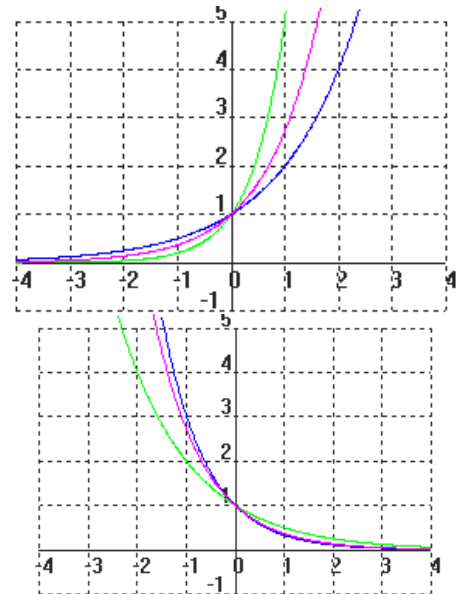
Si la base es $a > 1 \Rightarrow$ la tiene en $-\infty$ y además es estrictamente creciente

Si la base es $0 < a < 1 \Rightarrow$ la tiene en $+\infty$ y además es estrictamente decreciente

Continuidad: Es continua en todo \mathbb{R}

Todas cortan al eje “y” a altura $y = 1$ ya que $a^0 = 1$

No corta al eje “x”



FAMILIA DE FUNCIONES: LOGARÍTMICAS $f(x) = \log_a x$ “a” es un número POSITIVO fijo distinto de 1.

Son las inversas de las funciones exponenciales.

Nota: Es especialmente relevante el logaritmo neperiano (cuya base es el número “e”) $f(x) = \ln(x)$

Dominio: $(0, \infty)$

Recorrido: Todo \mathbb{R} (al contrario que en la exponencial)

Asíntotas: Tiene asíntota vertical en $x = 0$:

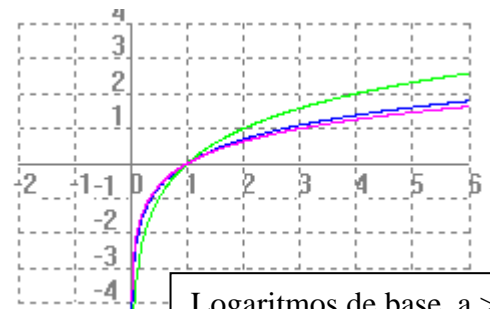
Si la base es $a > 1$, cuando se aproxima a cero tiende a $-\infty$ y además es estrictamente creciente

Si la base es $0 < a < 1$ cuando se aproxima a cero tiende a $+\infty$ y además es estrictamente decreciente

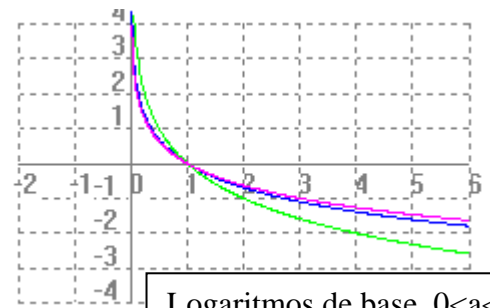
Continuidad: Es continua en su dominio $(0, \infty)$

Corta al eje “x” en $x = 1$ ya que $\log_a(1) = 0$ sea cual sea la base a (porque $a^0 = 1$)

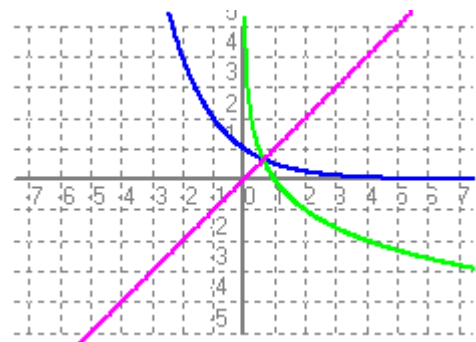
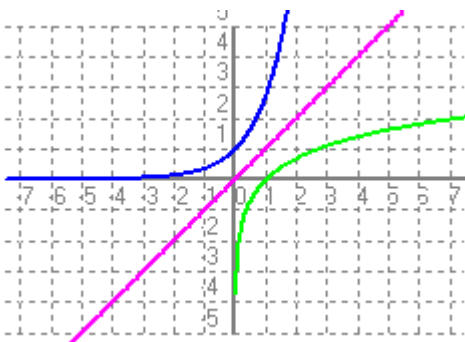
No corta al eje “y” (que es su asíntota vertical)



Logaritmos de base $a > 1$



Logaritmos de base $0 < a < 1$



Exponenciales y sus inversas logarítmicas

e^x y $\ln(x)$

$(\frac{1}{2})^x$ y $\log_{\frac{1}{2}} x$

Observa la simetría respecto de la bisectriz del primer cuadrante $y = x$