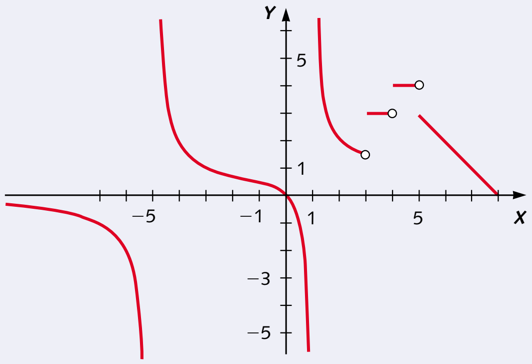
EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Comprueba, dando valores a x, que la función $f(x) = x^2 - 3$ tiende a 1, cuando x tiende a 2, y que $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$ tiende a 2, cuando x tiende a 4.

2. A partir de la gráfica de la función $f(x)$, determina los puntos de $\mathbb{R}$ donde no existe límite de la función.



3. Utilizando la gráfica de la función, determina los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) $\lim\limits_{x \to -5^-} f(x)$

c) $\lim\limits_{x \to -5^+} f(x)$

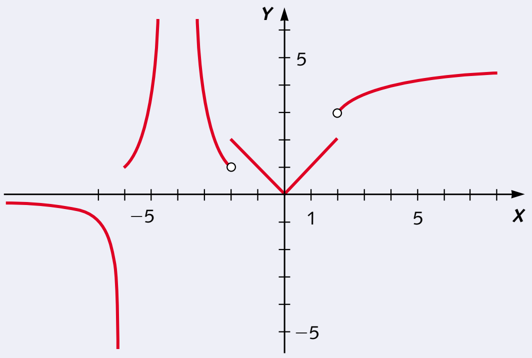
d) $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x)$

e) $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

f) $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$

g) $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$

h) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$



4. Calcula los siguientes límites de funciones:

a) $\lim\limits_{x \to 3} (2x^3 - x^2 + 5)$

b) $\lim\limits_{x \to 2} (x^4 - 7x^2 + 5)$

c) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$

d) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^3 + 27}{x^2 - 9}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(5 + x)^2 - 25}{x}$

f) $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^2 + x}{x^2 - 1}$

5. Calcula los siguientes límites de funciones racionales:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 + x}{x^2 - 3}$

b) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3 + 5}{x^2 - 2}$

c) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x + 1}{x^4 + 2x + 2}$

d) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{5x^5 - 2}{2x^5 + x^3 - 1}$

e) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{3x + 2}{x^2 + 7x + 1}$

f) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^2 + x - 5}{x + 3x^2}$

6. Calcula los siguientes límites de las funciones irracionales:

a) $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2x} - x\right)$

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{2x - 1} - \sqrt{3x - 2}}{x - 1}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x + 4} - 2}{5 - \sqrt{x + 25}}$

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{x^2 + 2} - \sqrt{x^2 - 2}\right]$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[x - \sqrt{x^2 - 4x + 5}\right]$

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[\sqrt{4x^2 - 3x + 2} - 2x - 4\right]$ Ojito con este

7. Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

a) En el intervalo (0, 2).

b) En el intervalo (−2, 0).

8. **(Selectividad. Córdoba, 1994).** Dada la función:

$$f(x) = \frac{|x - 2|}{|x - 1|} - 1$$

represéntala gráficamente, estudiando su continuidad.

9. **(Selectividad. Andalucía, 1997).** Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{5}{2} & \text{si } x < -2 \\ -x & \text{si } -2 \le x < 1 \\ x^2 - 3 & \text{si } 1 \le x \end{cases}$$

a) Representa gráficamente $f(x)$.

b) Estudia su continuidad.

10. **(Selectividad. Castilla-La Mancha, 1999).** Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 5x & \text{si } 0 \le x < 5 \\ x - 5 & \text{si } 5 \le x \le 10 \end{cases}$$

a) Represéntala gráficamente.

b) Estudia su continuidad.

11. **(Selectividad. Cataluña, 1997).** Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ x - 1 & \text{si } 2 < x \leq 3 \end{cases}$$

a) ¿Es continua? ¿En qué puntos? Dibuja su gráfica.

b) Comprueba que existe un punto $c \in [0, 3]$ tal que $f(c) = 0$. ¿Contradice esto el teorema de Bolzano? Razona la respuesta.

12. **(Selectividad. Madrid, 1997).** Estudia razonadamente la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 1 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 5 & \text{si } 4 \leq x \end{cases}$$

13. **(Selectividad. Castilla y León, 1997).** Representa gráficamente la función $f(x) = |x| + |x - 1|$ y estudia, a partir de su gráfica, su continuidad.

14. **(Selectividad. Zaragoza, 1999).** Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + b & x \leq -1 \\ 3x^2 + 4 & -1 < x < 1 \\ -x^3 + 8 & 1 \leq x \end{cases}$$

donde b es un parámetro real. Calcula el valor del parámetro b para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$ y en $x = 1$.

15. **(Selectividad. Castilla-La Mancha, 1998).** Dada la función $f(x)$ se pide:

a) Gráfica de la misma.

b) Estudia su continuidad y halla a para que sea continua en $x = 4$.

c) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$f(x) = \begin{cases} |x + 1| & \text{si } x \leq 2 \\ \dfrac{2}{x} & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ a & \text{si } 4 < x \end{cases}$$

16. Determina los valores de a y b y el valor de $f(0)$ para que la función $f(x)$, que se define a continuación, pueda ser continua:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{ax^2} & x < 0 \\ bx^x & 0 < x \leq 1 \\ \dfrac{x^2 + x - 1}{x} & 1 < x \end{cases}$$

17. **(Selectividad. Oviedo, 1997).** En cierto colectivo de hogares se ha observado empíricamente que el gasto mensual en alquiler de películas de vídeo –$G(t)$, en miles de pesetas– depende del tiempo dedicado mensualmente a ver televisión –t, en horas– en los siguientes términos:

$$G(t) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 \leq t < 20 \\ 0{,}1t & \text{para } 20 \leq t \leq 100 \\ \dfrac{40t - 1.000}{2t + 10} & \text{para } t > 100 \end{cases}$$

Justifica que la función $G(t)$ es discontinua en $t = 20$. ¿Existe una diferencia importante entre el gasto de los hogares según que el tiempo dedicado a ver televisión sea «ligeramente» inferior o superior a 20 horas? Razona la respuesta.

18. **(Selectividad. Valencia, 1997).** La calificación obtenida por un estudiante en cierto examen depende de las horas x de preparación a través de la función:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{5} & \text{si } 0 \leq x \leq 15 \\ \dfrac{2x}{0{,}2x + 3} & \text{si } 15 < x \end{cases}$$

a) Estudia el conjunto de valores positivos de x para los que $f(x)$ es creciente. ¿Tiene sentido afirmar que a más tiempo de preparación corresponde más calificación?

b) Contesta razonadamente si hay algún punto en que estudiar un poco más puede ser muy rentable.

c) ¿Se puede obtener la calificación 10? Justifica la respuesta.

19. **(Selectividad. Oviedo, 1999).** Se ha investigado el tiempo (T, en minutos) que se tarda en realizar cierta prueba de atletismo en función del tiempo de entrenamiento de los deportistas (x, en días), obteniéndose que:

$$T(x) = \begin{cases} \dfrac{300}{x + 30} & 0 \leq x \leq 30 \\ \dfrac{1.125}{(x - 5)(x - 15)} + 2 & x > 30 \end{cases}$$

a) Justifica que la función $T(x)$ es continua en todo su dominio.

b) ¿Se puede afirmar que cuanto más se entrene un deportista, menor será el tiempo empleado en realizar la prueba? ¿Algún deportista tardará más de 10 minutos en finalizar la prueba?

c) Por mucho que se entrene un deportista, ¿será capaz de hacer la prueba en menos de 1 minuto?, ¿y en menos de 2?