I.E.S. SATAFI   Sacitámetam   Curso 2º Bachillerato.   Fecha :

Control 2:

Nombre		Grupo	

1.-) ELIGE 4 de estos límites y calcúlalos RAZONADAMENTE. Si es necesario calcula los límites laterales. (4 puntos)

a) $$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-3x-10}{x^3-4x}\underset{\downarrow}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to -2}\frac{(x-5)\cancel{(x+2)}}{x(x-2)\cancel{(x+2)}}=\lim_{x\to -2}\frac{(x-5)}{x(x-2)}=\frac{-7}{8}$$

Para factorizar el denominador no debes olvidar sacar x factor común o darte cuenta de que no hay término independiente.

b) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3-6x^2+5x-1}{2x-3}-2x^2\right)\underset{\substack{\uparrow\\ Operamos}}{\overset{\substack{\infty-\infty\\ \downarrow}}{=}}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{4x^3-6x^2+5x-1}{2x-3}-\frac{4x^3-6x^2}{2x-3}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x-1}{2x-3}\right)=\frac{5}{2}$$

c) $$\lim_{x\to 1}\frac{2-\sqrt{6-2x}}{x-1}\overset{\substack{\frac{0}{0}\\ \downarrow}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{\left(2-\sqrt{6-2x}\right)\left(2+\sqrt{6-2x}\right)}{(x-1)\left(2+\sqrt{6-2x}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{2^2-\left(\sqrt{6-2x}\right)^2}{(x-1)\left(2+\sqrt{6-2x}\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{4-(6-2x)}{(x-1)\left(2+\sqrt{6-2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{2x-2}{(x-1)\left(2+\sqrt{6-2x}\right)}\underset{\substack{\uparrow\\ \text{Saco 2}\\ \text{factor común}}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{2\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\left(2+\sqrt{6-2x}\right)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

d) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1+x^2-x^3}{5-x^3}\right)^{\frac{2x^2+x}{x-1}}\overset{\substack{1^\infty\\ \downarrow}}{=}\lim_{x\to\infty}e^{\left(\frac{1+x^2-x^3}{5-x^3}-1\right)\cdot\frac{2x^2+x}{x-1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\left(\frac{1+x^2-x^3}{5-x^3}-\frac{5-x^3}{5-x^3}\right)\cdot\frac{2x^2+x}{x-1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\left(\frac{x^2-4}{5-x^3}\right)\cdot\frac{2x^2+x}{x-1}}=\lim_{x\to\infty}e^{\left(\frac{2x^4+x^3-8x^2-4x}{-x^4+x^3+5x-5}\right)}=e^{-2}$$

e) $\lim_{x\to 0}\frac{3x-1}{Ln(1-x^2)}=\frac{-1}{0}$!!!! Por tanto, el límite será $\pm\infty$. Estudiamos los límites laterales. Como $1-x^2$ es menor que 1 siempre, el logaritmo será negativo, por lo que ambos límites laterales serán $+\infty$

En el otro modelo sí salían diferentes.

2.-) Estudia la continuidad de las siguientes funciones. Clasifica las discontinuidades si las hubiese. En el apartado b), indica también si la función posee o no asíntotas horizontales. (1 + 1,5)

a) $$f(x)=\begin{cases} x^2-3 & \text{si } x\le 0\\ \dfrac{3x}{x^2-1} & \text{si } 0<x<2\\ -2+3x & \text{si } x\ge 2\end{cases}$$

Candidatos a discontinuidades: x= 0 y x=2 por ser la frontera de las partes. x= –1 y x = 1 por anular el denominador del segundo trozo. Como x=–1 NO está en el intervalo (0,2), queda descartado. No hay más por ser funciones polinómicas y/o racionales (ya vista)

Ejercicio:	1.)	2.-)	3.-)	4.-)
Puntuación:	4	2,5	1,5	2

Estudiemos x = 0 $\lim_{x\to 0^-} x^2-3=-3$; $f(0)=0^2-3=-3$; $\lim_{x\to 0^+}\frac{3x}{x^2-1}=-3$ Los tres existen y son iguales. CONTINUA en x = 0
Estudiemos x = 2 $\lim_{x\to 2^-}\frac{3x}{x^2-1}=2$; $f(2)=-2+3\cdot 2=4$ $\lim_{x\to 2}-2+3x=4$ Existen pero distintos: DISCONTINUIDAD de SALTO de 2 unidades
Estudiemos x = 1 $\lim_{x\to 1}\frac{3x}{x^2-1}=\frac{3}{0}$(!!!!!!) Estas son del tipo $\pm\infty$. Discontinuidad de salto ∞

b) $f(x)=\frac{x^3-2x^2-3x}{2x^2-7x+3}$	Por ser una función racional, determinamos el dominio. Para ello, vemos dónde se anula el denominador y esos serán discontinuidades.

$2x^2-7x+3=0 \Leftrightarrow x=3 \wedge x=\frac{1}{2}$ Estas son las discontinuidades. Pero además, tenemos factorizado el denominador $2\cdot(x-3)\left(x-\frac{1}{2}\right)$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-2x^2-3x}{2x^2-7x+3}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 3}\frac{x\cancel{(x-3)}(x+1)}{2\cancel{(x-3)}(x-\frac{1}{2})}=\frac{12}{5}$$ Como existe el límite, discontinuidad evitable.

$$\lim_{x\to \frac{1}{2}}\frac{x^3-2x^2-3x}{2x^2-7x+3}=\lim_{x\to 3}\frac{x\cancel{(x-3)}(x+1)}{2\cancel{(x-3)}(x-\frac{1}{2})}=\frac{3/4}{0}$$!!!!!!! Discontinuidad de salto ∞

Para ver si hay asíntotas horizontales, debemos estudiar qué sucede cuando x $\to \pm\infty$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-2x^2-3x}{2x^2-7x+3}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2}-\frac{2x^2}{x^2}-\frac{3x}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{7x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x-2-\frac{3}{x}}{2-\frac{7}{x}+\frac{3}{x^2}}=\begin{cases}\frac{+\infty}{2}=+\infty & \text{Cuando x} \to +\infty\\ \frac{-\infty}{2}=-\infty & \text{Cuando x} \to -\infty\end{cases}$$ Por tanto NO puede tener asíntotas horizontales.

3.-) Enuncia el teorema de Bolzano y después, dada la función, $f(x)=\begin{cases}5-x^3 & \text{si } x\le -3\\ \frac{3x^3-7x-11}{x^2+1} & \text{si } -3<x\end{cases}$

Si la función f(x) es continua en [a,b] y f(a)·f(b) < 0, entonces f(x) se anula en algún punto de [a,b]

a) ¿Permite el teorema de Bolzano asegurar que se anula en el intervalo [-5,2]?

El intervalo es cerrado, veamos si es continua EN ESTE INTERVALO.

Como el único candidato a discontinuidad es x = –3, que SÍ ESTÁ EN EL INTERVALO, y $\lim_{x\to -3} 5-x^3 = 32 = f(-3)$; $\lim_{x\to -3} \frac{3x^3-7x-11}{x^2+1} = \frac{-113}{10} \neq 32$ No es continua, luego no puedo asegurarlo con Bolzano

b) ¿Y en el intervalo [0,4]? En este intervalo NO está la discontinuidad, luego sólo hay que ver si se produce el cambio de signo en los extremos. f(0) = –11<0 y $f(4) = \frac{3\cdot 4^3 - 7\cdot 4 - 11}{4^2+1} = \frac{163}{17} > 0$

Como se dan TODAS las CONDICIONES, podemos asegurar que se anulará en este intervalo.

4.-) Determina el valor de los parámetros "a" y "b" para que la función $f(x) = \begin{cases} 3 - ax^2 + bx^3 & \text{si } x \le 0 \\ \frac{6}{ax+a+b} & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{3}{bx+6} & \text{si } 2 \le x \end{cases}$

sea continua en m x=0 y en x = 2 ¿podemos asegurar con esos valores que será continua en toda la recta real.

Para ser continua en esos puntos los límites laterales y el valor de la función deben coincidir.

En x = 0

$$\left.\begin{cases} f(0) = \lim_{x\to 0^-} 3 - ax^2 + bx^3 = 3 \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{6}{ax+a+b} = \frac{6}{a+b} \end{cases}\right\} \Rightarrow 3 = \frac{6}{a+b} \quad \Rightarrow 3a + 3b = 6$$

En x = 2

$$\left.\begin{cases} \lim_{x\to 0^-} \frac{6}{ax+a+b} = \frac{6}{2a+a+b} = \frac{6}{3a+b} \\ f(2) = \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{bx+6} = \frac{3}{2b+6} \end{cases}\right\} \Rightarrow \frac{6}{3a+b} = \frac{3}{2b+6} \Rightarrow 12b + 36 = 9a + 3b \Rightarrow -9a + 9b = -36$$

Formamos el sistema

$\begin{cases} 3a + 3b = 6 \\ -9a + 9b = -36 \end{cases}$ Que tiene por solución: $a = 3;\ b = -1$

La función quedaría

$f(x) = \begin{cases} 3 - 3x^2 - x^3 & \text{si } x \le 0 \\ \frac{6}{3x+2} & \text{si } 0 < x < 2 \\ \frac{3}{-x+6} & \text{si } 2 \le x \end{cases}$ que tiene discontinuidades en x = 6