HOJA de problemas del Tema: COMPLEJOS para pendientes de Matemáticas I

1.-

Calcula en forma binómica:

a) $\dfrac{(3+3i)(4-2i)}{2-2i}$ **b)** $\dfrac{-2+3i}{(4+2i)(-1+i)}$

c) $\dfrac{2+5i}{3-2i}(1-i)$ **d)** $\dfrac{1+i}{2-i}+\dfrac{-3-2i}{1+3i}$

a) $\dfrac{(3+3i)(4-2i)}{2-2i} = \dfrac{12-6i+12i-6i^2}{2-2i} = \dfrac{18+6i}{2-2i} = \dfrac{(18+6i)(2+2i)}{(2-2i)(2+2i)} =$

$= \dfrac{36+36i+12i-12}{4+4} = \dfrac{24+48i}{8} = 3+6i$

b) $\dfrac{-2+3i}{(4+2i)(-1+i)} = \dfrac{-2+3i}{-4+4i-2i-2} = \dfrac{-2+3i}{-6+2i} = \dfrac{(-2+3i)(-6-2i)}{(-6+2i)(-6-2i)} =$

$= \dfrac{12+4i-18i+6}{36+4} = \dfrac{18-14i}{40} = \dfrac{9-7i}{20} = \dfrac{9}{20}-\dfrac{7}{20}i$

c) $\dfrac{2+5i}{3-2i}(1-i) = \dfrac{2-2i+5i+5}{3-2i} = \dfrac{7+3i}{3-2i} = \dfrac{(7+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} =$

$= \dfrac{21+14i+9i-6}{9+4} = \dfrac{15+23i}{13} = \dfrac{15}{13}+\dfrac{23}{13}i$

d) $\dfrac{1+i}{2-i}+\dfrac{-3-2i}{1+3i} = \dfrac{(1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}+\dfrac{(-3-2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)} =$

$= \dfrac{2+i+2i-1}{4+1}+\dfrac{-3+9i-2i-6}{1+9} = \dfrac{1+3i}{5}+\dfrac{-9+7i}{10} =$

$= \dfrac{2+6i-9+7i}{10} = \dfrac{-7+13i}{10} = \dfrac{-7}{10}+\dfrac{13}{10}i$

2.-

Calcula:

a) i^{37} **b)** i^{126} **c)** i^{87}

d) i^{64} **e)** i^{-216}

a) $i^{37} = i^1 = i$

b) $i^{126} = i^2 = -1$

c) $i^{87} = i^3 = -i$

d) $i^{64} = i^0 = 1$

e) $i^{-216} = \dfrac{1}{i^{216}} = \dfrac{1}{i^0} = \dfrac{1}{1} = 1$

3.-

Calcula m y n para que se verifique la igualdad:

$$(2+mi)+(n+5i) = 7-2i$$

$(2+mi)+(n+5i) = 7-2i$

$(2+n)+(m+5)i = 7-2i \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 2+n=7 \\ m+5=-2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} n=5 \\ m=-7 \end{array}$

4.-

Dado el número complejo $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, prueba que:

a) $1 + z + z^2 = 0$ **b)** $\frac{1}{z} = z^2$

a) $z^2 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}i^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i =$

$$= -\frac{2}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$1 + z + z^2 = 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = 0$$

b) $\frac{1}{z} = \frac{1}{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i} = \frac{1}{\frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}} = \frac{2}{-1 + \sqrt{3}i} = \frac{2\left(-1 - \sqrt{3}i\right)}{(-1 + \sqrt{3}i)(-1 - \sqrt{3}i)} =$

$$= \frac{2\left(-1 - \sqrt{3}i\right)}{1 + 3} = \frac{2\left(-1 - \sqrt{3}i\right)}{4} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (lo habíamos calculado en a)

Por tanto: $\frac{1}{z} = z^2$

5.-

Halla el valor de b para que el producto $(3 - 6i)(4 + bi)$ sea:

a) Un número imaginario puro.

b) Un número real.

$(3 - 6i)(4 + bi) = 12 + 3bi - 24i + 6b = (12 + 6b) + (3b - 24)i$

a) $12 + 6b = 0 \rightarrow b = -2$

b) $3b - 24 = 0 \rightarrow b = 8$

6.-

Determina a para que $(a - 2i)^2$ sea un número imaginario puro.

$$(a - 2i)^2 = a^2 + 4i^2 - 4ai = (a^2 - 4) - 4ai$$

Para que sea imaginario puro, ha de ser:

$$a^2 - 4 = 0 \rightarrow a = \pm 2 \rightarrow a_1 = -2,\ a_2 = 2$$

7.-

Calcula x para que el resultado del producto $(x + 2 + ix)(x - i)$ sea un número real.

☛ *Efectúa el producto. Iguala la parte imaginaria a 0 y resuelve la ecuación.*

$(x + 2 + ix)(x - i) = x^2 - xi + 2x - 2i + x^2 i - xi^2 =$

$$= x^2 - xi + 2x - 2i + ix^2 + x = (x^2 + 3x) + (x^2 - x - 2)i$$

Para que sea real, ha de ser:

$$x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

8.-

¿Para qué valores de x es imaginario puro el cociente $\dfrac{x+2+xi}{x+i}$?

$$\frac{x+2+xi}{x+i} = \frac{(x+2+xi)(x-i)}{(x+i)(x-i)} = \frac{x^2-ix+2x-2i+x^2i+x}{x^2+1} =$$

$$= \frac{(x^2+3x)+(x^2-x-2)i}{x^2+1} = \frac{x^2+3x}{x^2+1} + \frac{x^2-x-2}{x^2+1}i$$

Para que sea imaginario puro, ha de ser:

$$\frac{x^2+3x}{x^2+1} = 0 \rightarrow x^2+3x = 0 \rightarrow x(x+3) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = -3 \end{cases}$$

9.-

La suma de dos números complejos conjugados es 8 y la suma de sus módulos es 10. ¿Cuáles son esos números?

$$\left.\begin{array}{l} z+\bar{z} = 8 \\ |z| + |\bar{z}| = 10 \end{array}\right\} \text{ Como } |z| = |\bar{z}| \Rightarrow |z| = 5$$

Si llamamos:

$z = a+bi \rightarrow \bar{z} = a-bi$

$z+\bar{z} = a+bi+a-bi = 2a = 8 \rightarrow a = 4$

$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{16+b^2} = 5 \rightarrow 16+b^2 = 25 \rightarrow$

$\rightarrow b^2 = 9 \rightarrow b = \pm\sqrt{9} = \pm 3$

Hay dos soluciones:

$z_1 = 4+3i \rightarrow \bar{z}_1 = 4-3i$

$z_2 = 4-3i \rightarrow \bar{z}_2 = 4+3i$

10.-

Resuelve las siguientes ecuaciones y expresa las soluciones en forma binómica:

a) $x^2+4=0$ **b)** $x^2+x+4=0$

c) $x^2+3x+7=0$ **d)** $x^2-x+1=0$

a) $x^2+4 = 0 \rightarrow x^2 = -4 \rightarrow x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$

$x_1 = -2i,\ x_2 = 2i$

b) $x^2+x+4 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-1\pm\sqrt{1-16}}{2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{-15}}{2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{15}i}{2}$

$x_1 = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{15}}{2}i,\ x_2 = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{15}}{2}i$

c) $x^2+3x+7 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-3\pm\sqrt{9-28}}{2} = \dfrac{-3\pm\sqrt{-19}}{2} = \dfrac{-3\pm\sqrt{19}i}{2}$

$x_1 = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{\sqrt{19}}{2}i,\ x_2 = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{\sqrt{19}}{2}i$

d) $x^2-x+1 = 0 \rightarrow x = \dfrac{1\pm\sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{1\pm\sqrt{-3}}{2} = \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

$x_1 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ x_2 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$