EJERCICIOS RESUELTOS (2ª Parte)

DERIVADAS Y REGLA DE LA CADENA

(La notación que se sigue es: Cuando aparece la letra u, nos referimos a la función u(x), de la misma forma si aparece v, nos referiremos a la función v(x))

1. $y = 2\arccos 2x + \sqrt{1-4x^2}$

Solución:

- Para el primer sumando aplicamos la derivada del arcocoseno y la "regla de la cadena" (por lo tanto, hay que multiplicar por la derivada de **2x** que es **2**).

- Para el segundo sumando también utilizamos la derivada de una raíz y la regla de la cadena (multiplicando, esta vez, por la derivada de **1 - 4x²** que es **-8x**).

- Las fórmulas que hay que utilizar son:

$$y = \arccos u \qquad y' = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$y = \sqrt{u} \qquad y' = \frac{1}{2\cdot\sqrt{u}} \cdot u'$$

- Así tenemos (teniendo en cuenta que la derivada de una constante que va multiplicando es ella misma)

$$y' = \frac{-2}{\sqrt{1-(2x)^2}} \cdot 2 + \frac{1}{2\cdot\sqrt{1-4x^2}} \cdot (-8x)$$

Hacemos operaciones:

$$y' = \frac{-4}{\sqrt{1-4x^2}} + \frac{-4x}{\sqrt{1-4x^2}} =$$

sacando factor común:

$$= \frac{-4}{\sqrt{1-4x^2}}(1+x) = \frac{-4(1+x)}{\sqrt{1-4x^2}}$$

2. $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$

Solución:

- \- Aplicamos las fórmulas correspondientes a la derivada de un cociente y a la derivada de una raíz (potencia de **x**). La correspondiente a la derivada de un cociente es:

$$y = \frac{u}{v} \qquad\qquad y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$y' = \frac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(x^2+1) + (2x)\sqrt{x}}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{x^2+1}{2\sqrt{x}} + 2x\sqrt{x}}{(x^2+1)^2} = \frac{\dfrac{x^2+1+(2x\sqrt{x})\cdot(2\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}}{(x^2+1)^2} =$$

haciendo operaciones y bajando la expresión que divide al numerador:

$$= \frac{x^2+1+4x^2}{(x^2+1)^2\cdot(2\sqrt{x})} = \frac{1+5x^2}{(x^2+1)^2\cdot(2\sqrt{x})}$$

3. $y = \ln\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen}x}{1+\operatorname{sen}x}}$

Soluciones:

- \- Hay que aplicar repetidamente la regla de la cadena basándose en fórmulas de derivadas que da la tabla (la del neperiano, la de la raíz, la del cociente, la del seno de x)
- \- Las fórmulas que hay que utilizar son:

$$y = \ln u \qquad y' = \frac{u'}{u}$$

$$y = \sqrt{u} \qquad y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$$

$$y = \frac{u}{v} \qquad y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$y = senx \qquad y' = \cos x$$

- Así tenemos:

$$y' = \frac{1}{\sqrt{\frac{1-senx}{1+senx}}} \cdot \frac{1}{2\cdot\sqrt{\frac{1-senx}{1+senx}}} \cdot \frac{(-\cos x)(1+senx)-(\cos x)(1-senx)}{(1+senx)^2} =$$

(Simplificando se tiene lo siguiente)

$$= \frac{1}{2\cdot\frac{1-senx}{1+senx}} \cdot \frac{(-\cos x)(1+senx)-(\cos x)(1-senx)}{(1+senx)^2} =$$

$$= \frac{-\cos x - \cos x \cdot senx - \cos x + \cos x \cdot senx}{2\cdot\frac{1-senx}{1+senx}\cdot(1+senx)^2} = \frac{-2\cos x}{2\cdot\frac{1-senx}{1+senx}\cdot(1+senx)^2} =$$

$$= \frac{-\cos x}{\frac{1-senx}{1+senx}\cdot(1+senx)^2} = \frac{-\cos x}{(1-senx)\cdot(1+senx)} =$$

$$= \frac{-\cos x}{1-sen^2x} = \frac{-\cos x}{\cos^2 x} = \frac{-1}{\cos x} = -\sec x$$

- También se podía haber obtenido el mismo resultado haciendo operaciones en la expresión original de la función (antes de derivar)

$$y = \ln\sqrt{\frac{1-senx}{1+senx}} = \frac{1}{2}\cdot\ln\frac{1-senx}{1+senx} = \frac{1}{2}\cdot\left[\ln(1-senx) - \ln(1+senx)\right]$$

- Ahora tenemos que derivar esta nueva expresión:

$$y'=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-senx}\cdot(-\cos x)-\frac{1}{1+senx}\cdot\cos x\right]=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-\cos x}{1-senx}-\frac{\cos x}{1+senx}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-\cos x}{1-senx}-\frac{\cos x}{1+senx}\right)=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{-\cos x\cdot(1+senx)}{(1-senx)(1+senx)}-\frac{\cos x(1-senx)}{(1+senx)(1-senx)}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left[\frac{-\cos x-\cos x\cdot senx}{1-sen^2x}-\frac{\cos x-\cos x\cdot senx}{1-sen^2x}\right]=\frac{1}{2}\cdot\frac{-2\cos x}{1-sen^2x}=\frac{-\cos x}{1-sen^2x}=$$

$$=\frac{-\cos x}{\cos^2x}=\frac{-1}{\cos x}=\mathbf{-sec}\,\boldsymbol{x}$$

---

4. $y=\ln(tg\,x)$

Solución:

$$y'=\frac{1}{tgx}\cdot\frac{1}{\cos^2x}=$$

$$=\frac{1}{\frac{senx}{\cos x}}\cdot\frac{1}{\cos^2x}=\frac{1}{senx}\cdot\frac{1}{\cos x}=\frac{1}{senx\cdot\cos x}=$$

multiplicamos arriba y abajo por 2, buscando el seno del ángulo doble:

$$=\frac{2}{2\cdot senx\cdot\cos x}=\frac{2}{sen2x}=\mathbf{2cosec2}\boldsymbol{x}$$

---

5. $y=tgx-\dfrac{x}{\cos^2x}$

Solución:

$$y'=\frac{1}{\cos^2x}-\frac{1\cdot\cos^2x-2\cdot\cos x\cdot(-\operatorname{sen}x)\cdot x}{\cos^4x}=$$

$$=\frac{1}{\cos^2x}-\frac{\cos^2x+2x\cdot\cos x\cdot\operatorname{sen}x}{\cos^4x}=\frac{\cos^2x}{\cos^4x}-\frac{\cos^2x+2x\cdot\cos x\cdot\operatorname{sen}x}{\cos^4x}=$$

$$=\frac{-2x\cdot\cos x\cdot\operatorname{sen}x}{\cos^4x}=\frac{\mathbf{-2x\,sen x}}{\mathbf{\cos^3 x}}$$

---

6. $y=\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2x}+\dfrac{1}{\cos^2x}$

Solución:

$$y'=\frac{-1\cdot2\cdot\operatorname{sen}x\cdot\cos x}{\operatorname{sen}^4x}+\frac{-1\cdot2\cdot\cos x\cdot(-\operatorname{sen}x)}{\cos^4x}=\frac{-2\operatorname{sen}x\cos x}{\operatorname{sen}^4x}+\frac{2\cdot\operatorname{sen}x\cos x}{\cos^4x}=$$

$$=\frac{-2\cos x}{\operatorname{sen}^3x}+\frac{2\cdot\operatorname{sen}x}{\cos^3x}=\frac{-2\cos^4x}{\operatorname{sen}^3x\cos^3x}+\frac{2\cdot\operatorname{sen}^4x}{\operatorname{sen}^3x\cos^3x}=\frac{2\operatorname{sen}^4x-2\cos^4x}{\operatorname{sen}^3x\cos^3x}=$$

$$=\frac{2(\operatorname{sen}^4x-\cos^4x)}{\operatorname{sen}^3x\cos^3x}=\textit{suma por diferencia}=\frac{2(\operatorname{sen}^2x-\cos^2x)(\operatorname{sen}^2x+\cos^2x)}{\operatorname{sen}^3x\cos^3x}=$$

$$=\textit{fórmula fundamental de la trigonometría}=\frac{2(\operatorname{sen}^2x-\cos^2x)}{\operatorname{sen}^3x\cos^3x}=$$

$$=\frac{16(\operatorname{sen}^2x-\cos^2x)}{8\cdot\operatorname{sen}^3x\cos^3x}=\frac{-16(\cos^2x-\operatorname{sen}^2x)}{(2\cdot\operatorname{sen}x\cos x)^3}=\frac{-16(\cos2x)}{(\operatorname{sen}2x)^3}=$$

$$=\frac{-16\cos2x}{\operatorname{sen}2x\cdot(\operatorname{sen}2x)^2}=\mathbf{-16\,cotg2x\,cosec^2 2x}$$

---

7. $e^x(\cos x+\operatorname{sen}x)$

Solución:

$$y' = e^x(\cos x + senx) + e^x(-senx + \cos x) =$$

$$= e^x(\cos x + senx - senx + \cos x) = \mathbf{2 \cdot cosx \cdot e^x}$$

---

8. $y = \dfrac{x - \cos x}{senx} \cdot e^x$

Solución:

8. $y = \dfrac{x - \cos x}{senx} \cdot e^x$

$$y' = \frac{(1 + senx)senx - cosx(x - cosx)}{sen^2 x} \cdot e^x + \frac{x - \cos x}{senx} \cdot e^x =$$

$$= sacando\ factor\ común = e^x \left[\frac{senx + sen^2 x - xcosx + \cos^2 x}{sen^2 x} + \frac{x - \cos x}{senx} \right] =$$

$$= e^x \left[\frac{senx - xcosx + 1}{sen^2 x} + \frac{x \cdot senx - senx \cdot \cos x}{sen^2 x} \right] =$$

$$= \boldsymbol{e^x \frac{senx(1 + x - \cos x) - xcosx + 1}{sen^2 x}}$$

---

9. $y = arctgx - \dfrac{x}{1 + x^2}$

Solución:

$$y' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1\cdot(1+x^2)-2x\cdot x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1+x^2)^2} - \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \mathbf{\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}}$$

---

10. $y = \frac{2+\cos x}{1+2\cos x}$

Solución:

$$y' = \frac{-sen x(1+2\cos x)-2(-sen x)(2+\cos x)}{(1+2\cos x)^2} =$$

$$= \frac{-sen x-2sen x\cos x+4sen x+2sen x\cos x}{(1+2\cos x)^2} = \frac{-sen x+4sen x}{(1+2\cos x)^2} = \mathbf{\frac{3sen x}{(1+2\cos x)^2}}$$
