EJERCICIOS TRIGONOMETRÍA

1.- Expresa en radianes: 45°, 120°, 210°, 330°.

Hacemos los cambios de unidades $45^\circ = 45^\circ \cdot \frac{\pi\, rad}{180^\circ} = \frac{\pi}{4} rad$, $120^\circ = 120^\circ \cdot \frac{\pi\, rad}{180^\circ} = \frac{2\pi}{3} rad$

$210^\circ = 210^\circ \cdot \frac{\pi\, rad}{180^\circ} = \frac{7\pi}{6} rad$ y por último $330^\circ = 330^\circ \cdot \frac{\pi\, rad}{180^\circ} = \frac{11\pi}{6} rad$

2.- Si $\cos(x) = -\frac{3}{5}$ y $180^\circ < x < 270^\circ$, calcula sen(x) y tg(x) .

$sen(x) = -\sqrt{1-\cos^2(x)} = -\sqrt{1-\left(\frac{-3}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$ (negativo por ser del tercer cuadrante) y entonces

$$tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)} = \frac{\frac{-4}{5}}{-\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

4.- Halla las restantes razones trigonométricas del ángulo a, si cos a = $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ y a>180°

$sen(x) = -\sqrt{1-\cos^2(x)} = -\sqrt{1-\left(\frac{2\sqrt{3}}{5}\right)^2} = -\sqrt{\frac{13}{25}} = -\frac{\sqrt{13}}{5}$ (negativo por ser del cuarto cuadrante) y entonces

$$tg(x) = \frac{sen(x)}{\cos(x)} = \frac{-\frac{\sqrt{13}}{5}}{\frac{2\sqrt{3}}{5}} = \frac{-\sqrt{13}}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{39}}{6}$$

5.- Si $\cos x = -\frac{1}{2}$ y tg x > 0, averigua a qué cuadrante pertenece x y halla sen(180–x) y sen(180 + x)

Si el coseno es negativo será del 2° o 3er cuadrante, pero si la tangente es positiva se trata del tercer cuadrante.

180-x es suplementario de x, $sen(180-x) = sen(x) = -\sqrt{1-\cos^2(x)} = -\sqrt{1-\left(\frac{-1}{2}\right)^2} = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (nnegativo porque x está en el tercer cuadrante).

180+x difiere de x en 180 y por tanto $sen(180+x) = -sen(x) = \sqrt{1-\cos^2(x)} = \sqrt{1-\left(\frac{-1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

7.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos(x)=\frac{5}{4}$

$\frac{5}{4}=\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos(x)=\frac{1+\cos(x)}{2}\cos(x)=\frac{\cos(x)+\cos^2(x)}{2}$ y por lo tanto llegamos a la ecuación de segundo grado $\frac{\cos(x)+\cos^2(x)}{2}=\frac{5}{4}\rightarrow 4\cos(x)+4\cos^2(x)=10\rightarrow 4\cos^2(x)+4\cos(x)-10=0$

$4\cos^2(x)+4\cos(x)-10=0\rightarrow\cos(x)=\frac{-4\pm\sqrt{16+160}}{8}=\begin{cases}1.158\\-2.158\end{cases}$ y por tanto no tiene solución

(Nota: lo podríamos haber sabido antes ya que $\left|\cos(x)\right|\leq 1\rightarrow\cos^2(\frac{x}{2})\cos(x)\leq 1<\frac{5}{4}$)

b) $sen(2x)-2\cos^2(x)=0$

$0=sen(2x)-2\cos^2(x)=2sen(x)\cos(x)-2\cos^2(x)=2(sen(x)-\cos(x))\cos(x)$

y por lo tanto $\begin{cases}(sen(x)-\cos(x))=0\rightarrow sen(x)=\cos(x)\rightarrow tg(x)=1\rightarrow x=45^{\circ}+k\cdot 180\\\cos(x)=0\rightarrow x=90+k\cdot 180\end{cases}$

c) $2sen(x)=tg(2x)$

$2sen(x)=tg(2x)\rightarrow 2sen(x)=\frac{2sen(x)\cos(x)}{\cos^2(x)-sen^2(x)}\rightarrow 2sen(x)=\frac{2sen(x)\cos(x)}{\cos^2(x)-(1-\cos^2(x))}$

$\rightarrow 2sen(x)\left(2\cos^2(x)-1\right)=2sen(x)\cos(x)\rightarrow 2sen(x)\left[2\cos^2(x)-\cos(x)-1\right]=0$

$$\begin{cases}2sen(x)=0\rightarrow x=90^{\circ}+k\cdot 180^{\circ}\\[2ex] 2\cos^2(x)-\cos(x)-1=0\rightarrow\cos(x)=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{4}=\begin{cases}1\rightarrow x=k\cdot 360^{\circ}\\ \frac{-1}{2}\rightarrow x=\begin{cases}120^{\circ}+k\cdot 360^{\circ}\\ \underbrace{240^{\circ}}_{=-120^{\circ}}+k\cdot 360^{\circ}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

d) $sen(x)+\cos(2x)=1$

$sen(x)+\cos(2x)=1\rightarrow sen(x)+\cos^2(x)-sen^2(x)=1\rightarrow sen(x)+1-sen^2(x)-sen^2(x)=1$, con lo cual obtenemos la ecuación $sen(x)-2sen^2(x)=0\rightarrow sen(x)(1-2sen(x))=0$

$sen(x)=0\rightarrow x=k\cdot 180^{\circ}$

$1-2sen(x)=0\rightarrow sen(x)=\frac{1}{2}\rightarrow x=\begin{cases}30+k\cdot 360\\150+k\cdot 360\end{cases}$

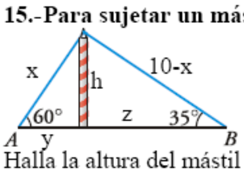
e) $sen(2x)=tg(x)$

$sen(2x)=tg(x)\rightarrow 2sen(x)\cos(x)=\frac{sen(x)}{\cos(x)}\rightarrow 2sen(x)\cos^2(x)=sen(x)\rightarrow sen(x)\left(2\cos^2(x)-1\right)=0$

$sen(x)=0\rightarrow x=k\cdot 180^{\circ}$

$\left(2\cos^2(x)-1\right)=0\rightarrow\cos(x)=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\rightarrow x=45^{\circ}+k\cdot 90^{\circ}$

15.-Para sujetar un mástil al suelo como indica la figura hemos necesitado 10 metros de cable.



Halla la altura del mástil y la distancia entre los puntos A y B.

Tenemos que $\begin{cases} sen(60)=\dfrac{h}{x} \\ sen(35)=\dfrac{h}{10-x}\end{cases}$, de este sistema obtenemos que

$$\begin{cases} sen(60)\cdot x = h \\ sen(35)=\dfrac{sen(60)\cdot x}{10-x} \to (10-x)sen(35)=sen(60)\cdot x \to x=\dfrac{10\cdot sen(35)}{sen(60)+sen(35)}=3,98m \end{cases} \to h=3,45m$$

$$Ahora\ \frac{y}{sen(30)}=\frac{h}{sen(60)} \to y=\frac{h\cdot sen(30)}{sen(60)}=1,99m,\ \frac{z}{sen(55)}=\frac{h}{sen(35)} \to z=\frac{h\cdot sen(55)}{sen(35)}=4,93m$$

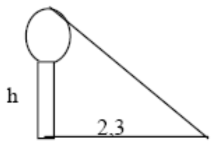
Y la distancia de A a B será 1,99+4,93 = 6,92 m.

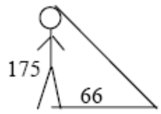
14.-Una persona de 1,75 m de estatura, proyecta una sombra de 66 cm. y en ese momento un árbol da una sombra de 2,3 m. Halla el ángulo que forman los rayos de sol con la horizontal y la altura del árbol.

Los triángulos formados por la persona y su sombra y el árbol y la suya son semejantes y podemos escribir

$\dfrac{h}{2,3}=\dfrac{175}{66} \to h=\dfrac{175\cdot 2,3}{66}=6,098m$ donde h es la altura del árbol. Para saber el ángulo basta con hacer

$$arctg\left(\frac{175}{66}\right)=69^{\circ}\,20'11''$$





12.-Resuelve el triángulo del que se conocen los lados a = 10 , b = $5\sqrt{2}$ y el ángulo $\hat{A}=\dfrac{\pi}{4}$.

Usando el teorema del seno $\dfrac{a}{sen(A)}=\dfrac{b}{sen(B)} \to sen(B)=\dfrac{b\cdot sen\left(\frac{\pi}{4}\right)}{a}=\dfrac{5\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}}{10}=\dfrac{1}{2} \to B=\begin{cases}\dfrac{\pi}{6}\\ \dfrac{5\pi}{6}\end{cases}$

Y sólo tenemos la solución $B=\dfrac{\pi}{6} \to C=\pi-\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{7\pi}{12} \to c=\dfrac{a\cdot sen(C)}{sen(A)}=13,66$

16.-Demuestra la identidad: $\dfrac{senx}{1+\cos x}+\dfrac{1+\cos x}{senx}=\dfrac{2}{senx}$

$$\frac{sen(x)}{1+\cos(x)}+\frac{1+\cos(x)}{sen(x)}=\frac{sen^2(x)+(1+\cos(x))^2}{(1+\cos(x))sen(x)}=\frac{sen^2(x)+1+\cos^2(x)+2\cos(x)}{(1+\cos(x))sen(x)}=$$

$$=\frac{1+1+2\cos(x)}{(1+\cos(x))sen(x)}=\frac{2(1+\cos(x))}{(1+\cos(x))sen(x)}=\frac{2}{sen(x)}$$

20.-Conocidas las razones trigonométricas de 30°, 60° y 45°, calcula: a) sen 22° 30' b) sen 75°.

$$sen(22^{\circ}30')=sen\left(\frac{45}{2}\right)=+\sqrt{\frac{1-\cos(45)}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

$$sen(75^{\circ})sen(30+45)=\mathrm{sen}(30)\cdot\cos(45)+\cos(30)\cdot\mathrm{sen}(45)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$