1.- Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $\frac{4x^2-4x}{3}-x=x^2-\frac{3x+4}{3}$

b) $x^4-11x^2+28=0$

c) $\sqrt{3x+16}=2x-1$

d) $\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=1+\frac{4}{x^2}$

e) $x+4=\sqrt{4x+12}$

f) $\frac{2x-1}{x}+\frac{4}{x-1}=\frac{11}{2}$

g) $x^2+\frac{15}{4}=\frac{3x^2-x+3}{4}+3$

h) $x^4-21x^2-100=0$

i) $\sqrt{3x-3}+x=7$

j) $\frac{2}{x-1}+\frac{x-2}{x+1}=\frac{5}{4}$

Solución:

a) $\frac{4x^2-4x}{3}-x=x^2-\frac{3x+4}{3}$ $\quad \frac{4x^2-4x}{3}-\frac{3x}{3}=\frac{3x^2}{3}-\frac{3x+4}{3}$

$4x^2-4x-3x=3x^2-3x-4$; $\quad x^2-4x+4=0$; $\quad x=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\frac{4}{2}=2$

b) $x^4-11x^2+28=0$. Hacemos el cambio $x^2=z \rightarrow x^4=z^2$

$$z^2-11z+28=0 \quad z=\frac{11\pm\sqrt{121-112}}{2}=\frac{11\pm 3}{2}=\begin{cases} z=7 \rightarrow x=\pm\sqrt{7} \\ z=4 \rightarrow x=\pm 2 \end{cases}$$

Y por lo tanto tiene cuatro soluciones $x_1=-\sqrt{7}, \quad x_2=\sqrt{7}, \quad x_3=-2, \quad x_4=2$

c) $\sqrt{3x+16}=2x-1$; (elevando al cuadrado) $3x+16=(2x-1)^2$, es decir,

$3x+16=4x^2+1-4x$; $\quad 4x^2-7x-15=0$ y

$$x=\frac{7\pm\sqrt{49+240}}{8}=\frac{7\pm\sqrt{289}}{8}=\frac{7\pm 17}{8}\rightarrow\begin{cases} x=3 \\ x=\frac{-10}{8}=\frac{-5}{4} \end{cases}$$

Comprobación:

$x=3 \rightarrow \sqrt{25}=5 \rightarrow x=3$ sí vale., $\quad x=\frac{-5}{4}\rightarrow\sqrt{\frac{49}{4}}=\frac{7}{2}\neq\frac{-7}{2}\rightarrow x=\frac{-5}{4}$ no vale.

Hay una solución: $x=3$

d) $\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}=1+\frac{4}{x^2}$; $\quad \frac{3x}{x^2}+\frac{2}{x^2}=\frac{x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}$ y entonces $3x+2=x^2+4$

Si resolvemos entonces $x^2-3x+2=0$ obtenemos que $x=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}\rightarrow\begin{cases} x=2 \\ x=1 \end{cases}$

e) $x+4=\sqrt{4x+12}$; elevando al cuadrado) $(x+4)^2=4x+12$, es decir , $x^2+16+8x=4x+12$

y entonces $x^2+4x+4=0$; $x=\dfrac{-4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\dfrac{-4}{2}=-2$

Comprobación: $x=-2 \rightarrow 2=\sqrt{4} \rightarrow$ sí es válida

f) $\dfrac{2x-1}{x}+\dfrac{4}{x-1}=\dfrac{11}{2}$; $\dfrac{2(2x-1)(x-1)}{2x(x-1)}+\dfrac{8x}{2x(x-1)}=\dfrac{11x(x-1)}{2x(x-1)}$

$2(2x^2-3x+1)+8x=11x^2-11x$; $4x^2-6x+2+8x=11x^2-11x$

y resolviendo la ecuación

$$7x^2-13x-2=0 \quad x=\frac{13\pm\sqrt{169+56}}{14}=\frac{13\pm\sqrt{225}}{14}=\frac{13\pm15}{14}\rightarrow\begin{cases}x=2\\ x=\dfrac{-2}{14}=\dfrac{-1}{7}\end{cases}$$

g) $x^2+\dfrac{15}{4}=\dfrac{3x^2-x+3}{4}+3$; $\dfrac{4x^2}{4}+\dfrac{15}{4}=\dfrac{3x^2-x+3}{4}+\dfrac{12}{4}$

$4x^2+15=3x^2-x+3+12$

$x^2+x=0$ y sacando factor común $x(x+1)=0 \quad \rightarrow \quad \begin{cases}x=0\\ x+1=0 \rightarrow x=-1\end{cases}$

h) $x^4-21x^2-100=0$ Cambio: $x^2=z \rightarrow x^4=z^2$

$z^2-21z-100=0$ que resuelta

$$z=\frac{21\pm\sqrt{441+400}}{2}=\frac{21\pm\sqrt{841}}{2}=\frac{21\pm29}{2}\rightarrow\begin{cases}z=25 \rightarrow x=\pm5\\ z=-4 \quad \text{(no vale)}\end{cases}$$

Dos soluciones: $x_1=-5$, $x_2=5$

i) $\sqrt{3x-3}+x=7$; (dejamos la raíz sola) ; $\sqrt{3x-3}=7-x$

$3x-3=(7-x)^2$; $3x-3=49+x^2-14x$; $x^2-17x+52=0$

$$x=\frac{17\pm\sqrt{289-208}}{2}=\frac{17\pm\sqrt{81}}{2}=\frac{17\pm9}{2}\rightarrow\begin{cases}x=13\\ x=4\end{cases}$$

Comprobación:

$x=13 \rightarrow \sqrt{36}+13=6+13=19\neq7 \rightarrow x=13$ no vale

$x=4 \rightarrow \sqrt{9}+4=3+4=7 \rightarrow x=7$ sí vale

Hay una solución: $x=4$

j) $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{x-2}{x+1}=\dfrac{5}{4}$; $\dfrac{8(x+1)}{4(x-1)(x+1)}+\dfrac{4(x-1)(x-2)}{4(x-1)(x+1)}=\dfrac{5(x-1)(x+1)}{4(x-1)(x+1)}$

y entonces $8x+8+4\left(x^2-3x+2\right)=5\left(x^2-1\right)$; $8x+8+4x^2-12x+8=5x^2-5$

$$x^2+4x-21=0 \quad x=\frac{-4\pm\sqrt{16+84}}{2}=\frac{-4\pm\sqrt{100}}{2}=\frac{-4\pm10}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=3 \\ x=-7 \end{cases}$$

2.- Resuelve analíticamente el siguiente sistema e interprétalo gráficamente:

a) $\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{y-4x-2=0} \\ \boldsymbol{y=x^2+3x} \end{array}\right\}$ b) $\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=3} \\ \boldsymbol{\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=4} \end{array}\right\}$ c) $\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{y=x^2-3x} \\ \boldsymbol{y-2x+6=0} \end{array}\right\}$

Solución:

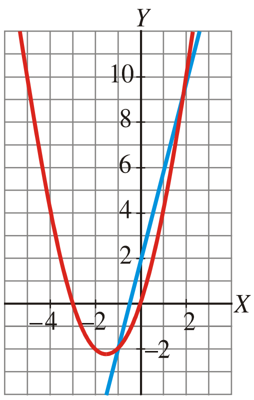
a) Lo resolvemos analíticamente:

$$\left.\begin{array}{l} y-4x-2=0 \\ y=x^2+3x \end{array}\right\} \begin{array}{l} y=4x+2 \\ 4x+2=x^2+3x;\ \ 0=x^2-x-2 \end{array}$$

$$x=\frac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{1\pm3}{2} \rightarrow \begin{cases} x=2 \rightarrow y=10 \\ x=-1 \rightarrow y=-2 \end{cases}$$

Solución : $\left.\begin{array}{l} x_1=2 \\ y_1=10 \end{array}\right\}$ y $\left.\begin{array}{l} x_2=-1 \\ y_2=-2 \end{array}\right\}$

Interpretación gráfica: La recta y la parábola se cortan en los puntos $(2,\ 10)$ y $(-1,\ -2)$



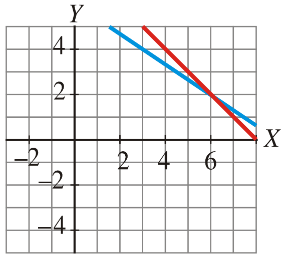
b) Resolvemos el sistema analíticamente:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{3}+\frac{y}{2}=3 \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=4 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \frac{2x}{6}+\frac{3y}{6}=\frac{18}{6} \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{2}=\frac{8}{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 2x+3y=18 \\ x+y=8 \end{array}\right\} y=8-x$$

$2x+3(8-x)=18$; $2x+24-3x=18$; $-x=-6$
$x=6 \rightarrow y=8-6=2$

Solución: $x=6$; $y=2$

• Interpretación gráfica: Estas dos rectas se cortan en el punto (6, 2).



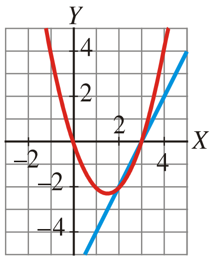
c) Lo resolvemos analíticamente:

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 - 3x \\ y - 2x + 6 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = x^2 - 3x \\ x^2 - 3x - 2x + 6 = 0;\ \ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{array}$$

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 3 \rightarrow y = 0 \\ x = 2 \rightarrow y = -2 \end{cases}$$

Solución: $\left.\begin{array}{l} x_1 = 3 \\ y_1 = 0 \end{array}\right\}$ y $\left.\begin{array}{l} x_2 = 2 \\ y_2 = -2 \end{array}\right\}$

• Interpretación gráfica: La parábola y la recta se cortan en los puntos $(3, 0)$ y $(2, -2)$



3.- Resuelve el siguiente sistema:

a) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{3}{x} - \dfrac{x}{y} = 0 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} y = 3x + 1 \\ \sqrt{x + y + 4} = y - x \end{array}\right\}$

Solución:

a) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{3}{x} - \dfrac{x}{y} = 0 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} 3y - x^2 = 0 \\ 2x - y = 3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} y = \dfrac{x^2}{3} \\ 2x - \dfrac{x^2}{3} = 3;\ \ 6x - x^2 = 9 \end{array}$

$0 = x^2 - 6x + 9;\ \ x = \dfrac{6 \pm \sqrt{36 - 36}}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \rightarrow y = 3$ *Solución:* $x = 3;\ \ y = 3$

b) $\left.\begin{array}{r} y = 3x+1 \\ \sqrt{x+y+4} = y - x \end{array}\right\} \begin{array}{c} y = 3x+1 \\ \sqrt{x+3x+1+4} = 3x+1-x \end{array}$

$\sqrt{4x+5} = 2x+1;\ \ 4x+5 = (2x+1)^2;\quad 4x+5 = 4x^2+1+4x;\ \ 4 = 4x^2;\ \ x^2 = 1$

$x = \pm\sqrt{1} \rightarrow \begin{cases} x = -1 \rightarrow \text{no válida} \\ x = 1 \quad\ \rightarrow y = 4 \end{cases}$. Hay una solución: $x = 1;\ \ y = 4$

4.- Halla los valores de *x*, *y*, *z* mediante el método de Gauss:

a) $\begin{cases} \boldsymbol{x + y - z = 2} \\ \boldsymbol{2x - 2y + 3z = 1} \\ \boldsymbol{x + 2y - z = 4} \end{cases}$ b) $\begin{cases} \boldsymbol{x - y + 2z = 7} \\ \boldsymbol{x + y - 3z = -5} \\ \boldsymbol{2x - y + 2z = 9} \end{cases}$

Solución:

a)

$\left.\begin{array}{r} x+y-z=2 \\ 2x-2y+3z=1 \\ x+2y-z=4 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{c} 1^a \\ 2^a\ -2\cdot 1^a \\ 3^a\ -\ 1^a \end{array}} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y-z=2 \\ -4y+5z=-3 \\ y=2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{l} y=2 \\ z = \dfrac{-3+4y}{5} = \dfrac{-3+8}{5} = 1 \\ x = 2-y+z = 2-2+1 = 1 \end{array}$

La solución es: $x = 1$, $y = 2$, $z = 1$

b)

$\left.\begin{array}{r} x-y+2z=7 \\ x+y-3z=-5 \\ 2x-y+2z=9 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{c} 1^a \\ 2^a\ -1^a \\ 3^a\ -\ 2\cdot 1^a \end{array}} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+2z=7 \\ 2y-5z=-12 \\ y-2z=-5 \end{array}\right\} \boxed{\begin{array}{c} 1^a \\ 2^a\ -\ 2\cdot 3^a \\ 3^a \end{array}} \rightarrow$

$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+2z=7 \\ -z=-2 \\ y-2z=-5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} z=2 \\ y=-5+2z=-5+4=-1 \\ x=7+y-2z=7-1-4=2 \end{array}\right\}$ *Solución*: $x = 2$, $y = -1$, $z = 2$

5.- La suma de dos números es 12 y la suma de sus inversos $\dfrac{3}{8}$. ¿Cuáles son dichos números?

Solución:

Llamamos *x* e *y* a los números que buscamos.

Así:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=12 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{8} \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} x+y=12 \\ 8y+8x=3xy \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y=12-x \\ 8(12-x)+8x=3x(12-x) \end{array}$$

$96-8x+8x=36x-3x^2; \quad 3x^2-36x+96=0$

$$x^2-12x+32=0; \quad x=\frac{12\pm\sqrt{144-128}}{2}=\frac{12\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{12\pm 4}{2} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} x=8 & \rightarrow \quad y=4 \\ x=4 & \rightarrow \quad y=8 \end{cases}$$

Los números son el 4 y el 8.

6.- Un comerciante compró dos artículos por 30 euros y los vendió por 33,9 euros. En la venta del primer artículo obtuvo un 10% de beneficio y en la venta del segundo artículo ganó un 15%. ¿Cuánto le costó cada uno de los artículos?

Solución:

Llamamos x al precio del primer artículo e y al precio del segundo. Así:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=30 \\ 1{,}1x+1{,}15y=33{,}9 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y=30-x \\ 1{,}1x+1{,}15(30-x)=33{,}9 \end{array}$$

$1{,}1x+34{,}5-1{,}15x=33{,}9; \quad -0{,}05x=-0{,}6; \quad x=12$

$y=30-12=18.$

El primer artículo le costó 12 euros y el segundo, 18.

7.- En una empresa obtienen 6 euros de beneficio por cada envío que hacen; pero si el envío es defectuoso, pierden por él 8 euros. En un día hicieron 2 100 envíos, obteniendo 9 688 euros de beneficio. ¿Cuántos envíos válidos y cuántos defectuosos hicieron ese día?

Solución:

Llamamos x al número de envíos válidos e y al número de envíos defectuosos. Así:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=2100 \\ 6x-8y=9688 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} y=2100-x \\ 6x-8(2100-x)=9688 \end{array}$$

$6x-16\,800+8x=9\,688; \quad 14x=26\,488; \quad x=1892$

$y=2100-1892=208$

Por tanto, el número de envíos válidos fue de 1 892 y el de envíos defectuosos, 208.