Comprueba que el conjunto de puntos (x, y) del plano que cumplen $x^2+y^2+x=-1$ es una circunferencia. Calcula su centro y su radio.

Lo hacemos de forma distinta al ejercicio 1. Para ello sabemos que en la ecuación

de una circunferencia $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = -2x_0 \\ B = -2y_0 \\ C = x_0^{\ 2} + y_0^{\ 2} - r^2 \end{cases}$ de donde

podemos deducir $x_0 = -\frac{1}{2}, y_0 = 0, r = \frac{\sqrt{5}}{2}$

Determina la ecuación de las rectas del plano que pasan por (3, 4) y son tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

La recta tangente pedida será de la forma $y - 4 = m(x-3)$ y deberemos calcular m para que sólo tenga un punto de intersección con la circunferencia.

Por eso,

$x^2 + (m(x-3)+4)^2 = 1 \Rightarrow (1+m^2)x^2 + (8m-6m^2)x + 9m^2 - 24m + 15 = 0$ sólo

tendrá una solución si $D = (8m-6m^2)^2 - 4(1+m^2)(9m^2-24m+15) = 0$

Calcula la ecuación de la hipérbola que tiene sus vértices en (0, 3) y (0,−3) y sus focos en (0,5) y (0,−5).

Sabemos que el eje principal (el focal) es vertical, que el centro es (0, 0), que b=3 y que la semidistancia focal es c=5 y por tanto $a = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$, con lo cual la ecuación es: $\frac{y^2}{3} - \frac{x^2}{4} = 1$

Respecto de las coordenadas usuales, calcula la ecuación de la hipérbola cuyos vértices son los puntos (−3, 2) y (1, 2) y que tiene asíntotas perpendiculares.

El centro es el punto medio de los dos vértices, es decir, C=(-1,2) y a=2, la mitad de la distancia entre los dos vértices. Si las asíntotas son perpendiculares se trata de una hipérbola equilátera de ecuación $\frac{(x+1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1 \rightarrow x^2 - y^2 + 2x + 4y - 7 = 0$

Calcula la ecuación de la parábola cuyo eje es la recta y = 1, vértice (2, 1) y que pasa por (3,−1).

El eje es horizontal, y como el vértice es (2,1) la ecuación buscada será de la forma $(y-1)^2 = 2 \cdot p(x-2)$, e imponiendo que pasa por A(3, -1),

$(-1-1)^2 = 2 \cdot p(3-2) \rightarrow 4 = 2p \rightarrow p = 2$ y la ecuación $y^2 - 4x - 2y + 9 = 0$

Respecto de las coordenadas usuales, calcula la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto (1, 1) y cuya directriz es la recta y = −2. Calcula también la ecuación reducida.

$\frac{p}{2} = dist(V, directriz) = 3 \rightarrow p = 6$. La ecuación será de la forma

$y - 1 = 2 \cdot 6(x-1)^2$ que desarrollada queda $x^2 - 2x - 12y + 13 = 0$

Calcula la ecuación de la parábola con recta directriz x+y−1 = 0 y foco (2, 0).

En este caso como la directriz no es ni horizontal ni vertical, no es ninguna ecuación tipo, sino que debemos calcularla utilizando la definición de parábola, esto es, conjunto de puntos para los que la distancia al foco y a la directriz coinciden.

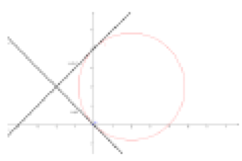
$\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \frac{|x+y-1|}{\sqrt{1^2+1^2}} \Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = \frac{(x+y-1)^2}{2}$ y desarrollando los cuadrados, y simplificando $x^2 + y^2 - 2xy - 6x + 2y + 7 = 0$

. **Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a la circunferencia $(x-2)^2+(y-2)^2=8$ en los puntos de abcisa x=0.**

Los puntos de abcisa x=0 son (0,0) y (4,0) y las rectas tangentes en esos puntos

$t_1 \equiv \perp (2,2), \textit{pasa por } (0,0) \rightarrow x + y = 0$

$t_2 \equiv \perp (2,-2), \textit{pasa por } (0,4) \rightarrow x - y + 4 = 0$



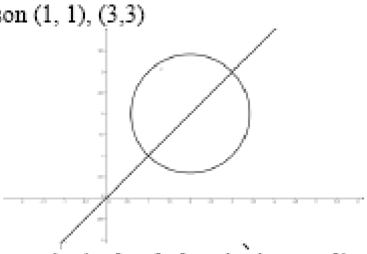
Halla la ecuación de la circunferencia de centro (-2, 3) y radio 4.

La ecuación será $(x+2)^2+(y-3)^2=4^2$ y desarrollada $x^2+y^2+4x-6y-3=0$

Halla los puntos de intersección de la circunferencia $x^2+y^2-4x-4y+6=0$ con la recta y=x.

Basta solucionar el sistema formado por las dos ecuaciones

$y=x \Rightarrow x^2+x^2-4x-4x+6=0 \Rightarrow 2x^2-8x+6=0 \Rightarrow x=\begin{cases}1 \to y=1\\ 3 \to y=3\end{cases}$ y los dos puntos de intersección son (1, 1), (3,3)



Encuentra los elementos principales de las siguientes elipses:

a. $9x^2+25y^2=900$ (sol: a=10, b=6, c=8,A(10,0), A'(-10,0), B(6,0), …)

b. $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ (sol: a=5, b=3, c=4, A(5,0),A'(-5,0), F(-4,0), F'(4,0)…)

Dada la ecuación $x^2+2y^2-2x+4y+1=0$ de ejes paralelos a los coordenados, hallar la ecuación, las coordenadas del centro y la excentricidad.

Completamos cuadrados

$$(x-1)^2+2(y+1)^2-3+1=0 \Rightarrow (x-1)^2+2(y+1)^2=2 \Rightarrow \frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(y+1)^2}{1}=1$$

y se trata de una elipse de centro C(1,1) $a=\sqrt{2}, b=1, c=\sqrt{2-1}=1, e=1/\sqrt{2}$

Halla la ecuación de una elipse centrada en el origen cuyo eje mayor mide 12 y pasa por el punto (3,4).

Tenemos $a=6$ y la ecuación buscada será de la forma $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, imponemos que pasa por (3,4), $\dfrac{3^2}{36}+\dfrac{4^2}{b^2}=1 \Rightarrow b^2=\dfrac{64}{3}$, y la ecuación $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{3y^2}{64}=1$

Una parábola tiene por vértice V(3, -2) y por foco F(3, 0). Halla las ecuaciones del eje, de la directriz y de la parábola.

Es sencillo ver que p=4, (doble de la distancia entre el vértice y el foco), con lo que la directriz será y=-4; el eje x=3, y la parábola $(x-3)^2=8(y+2)$