FUNCIONES ELEMENTALES

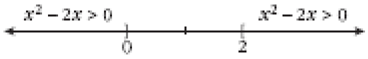
Halla el dominio de definición de las siguientes funciones:

a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$ **b)** $y = \dfrac{2}{x^3 - x^2}$

Resolución

a) La función está definida para los valores de x tales que $x^2 - 2x \geq 0$.

Resolvemos la inecuación:



$Dom = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$

b) Los valores de x que anulan el denominador no pertenecen al dominio de la función.

$x^3 - x^2 = 0 \rightarrow x^2(x - 1) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \end{cases}$

$Dom = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

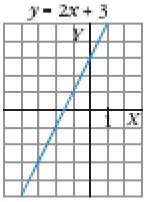
Representa gráficamente las siguientes funciones:

a) $y = |2x + 3|$ **b)** $y = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } x < 1 \\ 4 - x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

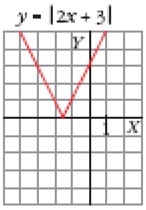
Resolución

a) La recta $y = 2x + 3$ corta al eje X en $x = -\dfrac{3}{2}$. Para valores menores que $-\dfrac{3}{2}$, cambiamos el signo de la ordenada. Por ejemplo: $(-2, -1) \rightarrow (-2, 1)$.

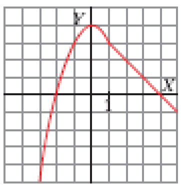
$y = 2x + 3$



$y = |2x + 3|$



b) Para valores menores que 1, la gráfica es una parábola de vértice (0, 4). Para valores mayores que 1, es una recta.



Dadas $f(x) = \sqrt{x + 1}$ **y** $g(x) = \dfrac{1}{x - 3}$, **halla:**

a) $f[g(2)]$ **b)** $g[f(15)]$ **c)** $f \circ g$ **d)** $g \circ f$

Resolución

a) $f[g(2)] = f\left(\dfrac{1}{2 - 3}\right) = f(-1) = \sqrt{-1 + 1} = 0$

b) $g[f(15)] = g\left(\sqrt{15 + 1}\right) = g(4) = \dfrac{1}{4 - 3} = 1$

c) $f \circ g(x) = f[g(x)] = f\left(\dfrac{1}{x - 3}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{x - 3} + 1} = \sqrt{\dfrac{x - 2}{x - 3}}$

d) $g \circ f(x) = g[f(x)] = g\left(\sqrt{x + 1}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{x + 1} - 3}$

LÍMITES

Calcula el límite de $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \leq 3 \\ x^2 - x - 7, & x > 3 \end{cases}$ en los puntos de abscisas 0, 3 y 5.

Di si la función es continua en esos puntos.

Resolución

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \leq 3 \\ x^2 - x - 7, & x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 2 \cdot 0 - 5 = -5$$

$$\lim_{x \to 3} f(x) \left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = 2 \cdot 3 - 5 = 1 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = 3^2 - 3 - 7 = -1 \end{array} \right\} \text{ No tiene límite en } x = 3.$$

$$\lim_{x \to 5} f(x) = 5^2 - 5 - 7 = 13$$

Es continua en $x = 0$ y en $x = 5$. No es continua en $x = 3$, porque no tiene límite en ese punto.

Halla los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x \to 0} 2^{x-1}$ b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{1}{\sqrt{x+4}}$ c) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x}{(x-4)^2}$

Resolución

a) $\lim\limits_{x \to 0} 2^{x-1} = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$

b) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{1}{\sqrt{x+4}} = \dfrac{1}{\sqrt{9}} = \dfrac{1}{3}$

c) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x}{(x-4)^2} = +\infty$ (Si $x \to 4^+$ o si $x \to 4^-$, los valores de la función son positivos.)

Halla las asíntotas de la función $f(x) = \dfrac{4x^2}{x^2 - 2x}$ y estudia la posición de la curva respecto a ellas.

Resolución

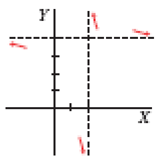
Simplificamos: $\dfrac{4x^2}{x^2 - 2x} = \dfrac{4x}{x - 2} \to y = \dfrac{4x}{x-2}$

- Asíntota vertical: $x = 2$

Posición $\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{4x}{x-2} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{4x}{x-2} = +\infty \end{cases}$

- Asíntota horizontal: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{4x}{x-2} = 4;\ y = 4$

Posición $\begin{cases} x \to +\infty, & y > 4 \\ x \to -\infty, & y < 4 \end{cases}$



Justifica qué valor debe tomar a para que la función sea continua en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Resolución

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La función es continua para valores de x menores que 1 y mayores que 1, porque ambos tramos son rectas.

Para que sea continua en $x = 1$, debe cumplirse: $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$f(1) = a - 2$

$$\lim_{x \to 1} f(x) \left\langle \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = a - 2 \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 4 - 2a \end{array} \right\}$$

Para que exista el límite, debe ser:

$a - 2 = 4 - 2a \to 3a = 6 \to a = 2$

Estudia las ramas infinitas de $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2+4}$ y sitúa la curva respecto a su asíntota.

Resolución

No tiene asíntotas verticales porque $x^2 + 4 \neq 0$ para cualquier valor de x.

No tiene asíntotas horizontales porque $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3}{x^2+4} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3}{x^2+4} = -\infty$.

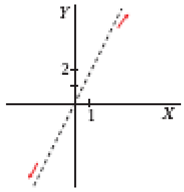
Tiene una asíntota oblicua, porque el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador.

$$\begin{array}{l|l} \;\;2x^3 & x^2+4 \\ \cline{2-2} \underline{-2x^3 - 8x} & 2x \\ \quad -8x & \end{array}$$

$$y = \frac{2x^3}{x^2+4} = 2x - \frac{8x}{x^2+4}$$

Asíntota oblicua: $y = 2x$

Posición $\begin{cases} x \to +\infty & \text{curva} < \text{asíntota} \\ x \to -\infty & \text{curva} > \text{asíntota} \end{cases}$



DERIVADAS

Halla la derivada de $y = 5x - x^2$ en los puntos de abscisas 4 y 5.

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5(4+h) - (4+h)^2 - 4}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{20 + 5h - 16 - h^2 - 8h - 4}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h^2 - 3h}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(-h-3)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (-h - 3) = -3$$

$$f'(5) = \lim_{h \to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5(5+h) - (5+h)^2 - 0}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(5+h)(5-5-h)}{h} = \lim_{h \to 0} (-5 - h) = -5$$

Halla la función derivada de $y = x^3 + x^2$.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^3 + (x+h)^2 - (x^3 + x^2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 + x^2 + 2xh + h^2 - x^3 - x^2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 + 2x + h)}{h} = \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2 + 2x + h) = 3x^2 + 2x$$

Halla la función derivada de las siguientes funciones:

1. $f(x) = 3x^2 - 6x + 5$

$f'(x) = 6x - 6$

2. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

3. $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt[3]{5x}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} + \frac{5}{3\sqrt[3]{5x}}$$

4. $f(x) = \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

$$f(x) = x^{-3/2} \rightarrow f'(x) = -\frac{3}{2}\, x^{-5/2} = \frac{-3}{2\sqrt{x^5}} = \frac{-3}{2x^2\sqrt{x}}$$

5. $f(x) = sen\, x \cos x$

$f'(x) = \cos^2 x - sen^2\, x$

6. $f(x) = tg\, x$

$$f'(x) = 1 + tg^2\, x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

7. $f(x) = x\, e^x$

$f'(x) = e^x + x\, e^x = e^x(1 + x)$

8. $f(x) = x \cdot 2^x$

$f'(x) = 2^x + x \cdot 2^x \cdot \ln 2 = 2^x(1 + x \ln 2)$

9. $f(x) = (x^2 + 1) \cdot \log_2 x$

$$f'(x) = 2x \log_2 x + (x^2 + 1) \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 2} = 2x \log_2 x + \frac{(x^2 + 1)}{x \ln 2}$$

10. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 1) - (x^2 + 1)\, 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-4x}{(x^2 - 1)^2}$$

11. $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 5x + 3}{x}$

$$f'(x) = \frac{(3x^2 + 6x - 5)x - (x^3 + 3x^2 - 5x + 3)}{x^2} = \frac{2x^3 + 3x^2 - 3}{x^2} = 2x + 3 - \frac{3}{x^2}$$

12. $f(x) = \dfrac{\log x}{x}$

$$f'(x) = \frac{[1/(\ln 10)] - \log x}{x^2} = \frac{1 - \ln 10 \log x}{x^2 \ln 10}$$

13. $f(x) = sen\,(x^2 - 5x + 7)$

$f'(x) = (2x - 5) \cos(x^2 - 5x + 7)$

14. $f(x) = \sqrt[3]{(5x + 3)^2} = (5x + 3)^{2/3}$

$$f'(x) = \frac{2}{3}\, (5x + 3)^{-1/3} \cdot 5 = \frac{10}{3\sqrt[3]{5x + 3}}$$

Calcula la función derivada de $f(x) = x^3 - 4x^2 + 1$ y halla:

a) Las pendientes de las rectas tangentes en las abscisas –1, 1 y 3.

b) Las ecuaciones de dichas rectas tangentes.

c) Las abscisas de los posibles máximos y mínimos relativos.

d) ¿Es $f(x)$ creciente o decreciente en $x = 2$?

$f'(x) = 3x^2 - 8x$

a) 11, –5 y 3

b) $y = 11(x + 1) - 4$; $y = -5(x - 1) - 2$; $y = 3(x - 3) - 8$

c) $f'(x) = 0 \rightarrow x = 0,\ x = 8/3$

d) $f'(2) = -4 < 0 \rightarrow$ decreciente

REPRESENTACIÓN DE FUNCIONES

Representa estas funciones:

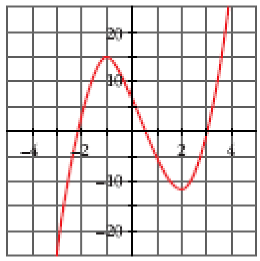
a) $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 8$

b) $y = -3x^4 + 4x^3 + 36x^2 - 90$

a) $f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 0 \rightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 2$

Máximo en (–1, 15).

Mínimo en (2, –12).



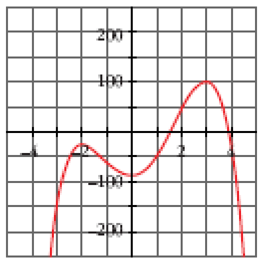
b) $f'(x) = -12x^3 + 12x^2 + 72x = -12x(x^2 - x - 6) = 0$

$x = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$$

Máximo en (–2, –26) y en (3, 99).

Mínimo en (0, –90).



Representa las siguientes funciones racionales

$$y = \frac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{(2x + 3)(x + 1) - (x^2 + 3x + 11)}{(x + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2x + 3x + 3 - x^2 - 3x - 11}{(x + 1)^2} =$$

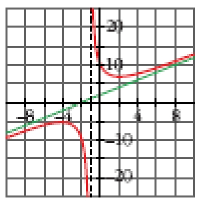
$$= \frac{x^2 + 2x - 8}{(x + 1)^2} = 0 \rightarrow x_1 = 2,\ x_2 = -4$$

Máximo en (–4, –5).

Mínimo en (2, 7).

Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota oblicua: $y = x + 2$

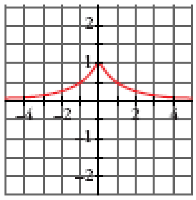


$$y = \frac{1}{x^2 + 1}$$

$f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2+1)^2} \;\rightarrow\; x = 0$

Máximo en (0, 1).

Asíntota horizontal: $y = 0$



$$y = \frac{x^2+2}{x^2-2x}$$

$$f'(x) = \frac{2x(x^2-2x)-(x^2+2)(2x-2)}{(x^2-2x)^2} = \frac{2x^3-4x^2-2x^3+2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2} =$$

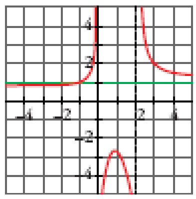
$$= \frac{-2x^2-4x+4}{(x^2-2x)^2} = 0 \;\rightarrow\; x = \frac{-2 \pm \sqrt{12}}{2} = \begin{cases} x_1 = 0{,}73 \\ x_2 = -2{,}73 \end{cases}$$

Máximo en (0,73; –2,73).

Mínimo en (–2,73; 0,73).

Asíntotas verticales: $x = 0$, $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 1$



Halla la ecuación de la recta tangente a la curva $y = x^2 - 5x + 6$ en el punto de abscisa $x = 2$.

$y' = 2x - 5$; $m = y'(2) = -1$, $y(2) = 0$

La recta es $y = -(x-2) = 2 - x$

Escribe la ecuación de la tangente a $y = -x^2 + 2x + 5$ en el punto de abscisa $x = -1$.

$y' = -2x + 2$; $m = y'(-1) = 4$, $y(-1) = 2$

La recta es $y = 4(x+1) + 2 = 4x + 6$

Escribe la ecuación de la tangente a $y = x^2 + 4x + 1$, cuya pendiente sea igual a 2.

$y' = 2x + 4 = 2 \;\rightarrow\; x = -1$; $y(-1) = -2$

La recta es $y = 2(x+1) - 2 = 2x$

Halla la ecuación de la tangente a la curva $y = \sqrt{x+1}$ en $x = 0$.

$y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$; $m = y'(0) = \dfrac{1}{2}$, $y(0) = 1$

La recta es $y = \dfrac{1}{2}x + 1$

Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $y = \dfrac{2x}{x-1}$ que son paralelas a la recta $2x + y = 0$.

$y' = \dfrac{2(x-1)-2x}{(x-1)^2} = \dfrac{-2}{(x-1)^2} = -2 \;\rightarrow\; (x-1)^2 = 1 \;\rightarrow\; x = 0,\; x = 2$

En (0, 0), $y = -2x$

En (2, 4), $y = -2(x-2) + 4 = -2x + 8$

Representa las siguientes funciones

$y = -x^4 + 2x^2$

$y' = -4x^3 + 4x = -4x(x^2-1) = 0 \;\rightarrow$

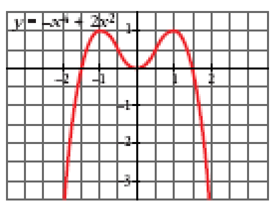
$\rightarrow x = 0,\; x = 1,\; x = -1$

Puntos de tangente horizontal:

(–1, 1), (0, 0) y (1, 1)

$$\lim_{x \to +\infty} (-x^4 + 2x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-x^4 + 2x^2) = -\infty$$



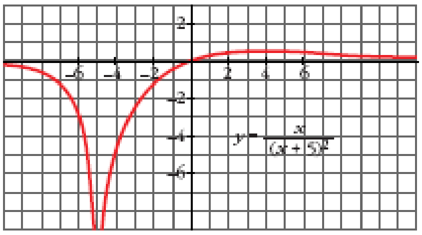
$y = \dfrac{x}{(x+5)^2}$

$$y' = \frac{(x+5)^2 - x \cdot 2(x+5)}{(x+5)^4} =$$

$$= \frac{5-x}{(x+5)^3} = 0 \;\rightarrow\; x = 5$$

Puntos de tangente horizontal:

$$\left(5, \frac{1}{20}\right)$$



$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{(x+5)^2} = 0; \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{(x+5)^2} = 0$$

$y = \dfrac{x^2 - 5}{2x - 4}$

$$y' = \frac{2x^2 - 8x + 10}{(2x-4)^2}$$

Asíntotas verticales: $x = 2$

Asíntotas oblicuas: $y = \dfrac{x}{2} + 1$

No hay asíntotas horizontales ni puntos de tangente horizontal.