Si $\vec{u}(-2, 5)$ y $\vec{v}(1, -4)$ son las coordenadas de dos vectores respecto de una base, halla las coordenadas respecto de la misma base de:

a) $2\vec{u} + \vec{v}$ b) $\vec{u} - \vec{v}$ c) $3\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$ d) $-\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v}$

a) $2\vec{u} + \vec{v} = 2(-2, 5) + (1, -4) = (-4, 10) + (1, -4) = (-3, 6)$

b) $\vec{u} - \vec{v} = (-2, 5) - (1, -4) = (-2, 5) + (-1, 4) = (-3, 9)$

c) $3\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v} = 3(-2, 5) + \frac{1}{3}(1, -4) = (-6, 15) + \left(\frac{1}{3}, \frac{-4}{3}\right) = \left(\frac{-17}{3}, \frac{41}{3}\right)$

d) $-\frac{1}{2}\vec{u} - 2\vec{v} = -\frac{1}{2}(-2, 5) - 2(1, -4) = \left(1, \frac{-5}{2}\right) + (-2, 8) = \left(-1, \frac{11}{2}\right)$

Consideramos los vectores $\vec{u}(0, 2)$ y $\vec{v}(1, \sqrt{3})$. Calcula:

a) Su producto escalar.

b) El módulo de ambos vectores.

c) El ángulo que forman.

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = (0, 2) \cdot (1, \sqrt{3}) = 0 \cdot 1 + 2 \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2$

$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2$

c) $\cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{2\sqrt{3}}{2 \cdot 2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = arc\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 30°$

Dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ cumplen que: $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = \frac{3}{2}$, $(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 30°$. Calcula:

a) $\vec{u} \cdot \vec{v}$ b) $\vec{v} \cdot \vec{u}$ c) $(-\vec{u}) \cdot \vec{v}$

d) $(3\vec{u}) \cdot (-5\vec{v})$ e) $\vec{u} \cdot \vec{u}$ f) $\vec{v} \cdot (-\vec{v})$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|\ |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 4 \cdot \frac{3}{2} \cdot \cos 30° = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$

b) $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v} = 3\sqrt{3}$

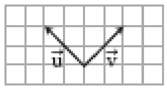
c) $(-\vec{u}) \cdot \vec{v} = -(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -3\sqrt{3}$

d) $(3\vec{u}) \cdot (-5\vec{v}) = 3(-5)(\vec{u} \cdot \vec{v}) = -15 \cdot 3\sqrt{3} = -45\sqrt{3}$

e) $\vec{u} \cdot \vec{u} = |\vec{u}|^2 \cos 0° = 16$

f) $\vec{v} \cdot (-\vec{v}) = -\vec{v} \cdot \vec{v} = -|\vec{v}|^2 = -\frac{9}{4}$

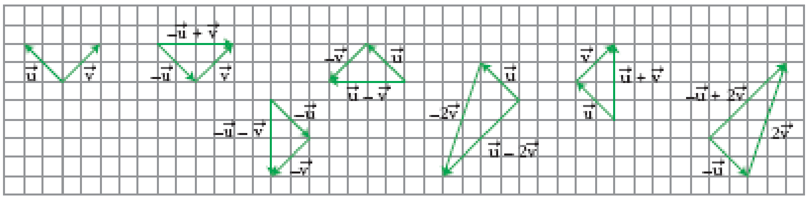
A la vista de la figura, dibuja los vectores:



$-\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{v}$,

$-\vec{u} - \vec{v}$, $-\vec{u} + 2\vec{v}$, $\vec{u} - 2\vec{v}$

Si tomamos como base $(\vec{u}, \vec{v})$, ¿cuáles son las coordenadas de los vectores que has dibujado?



$-\vec{u} + \vec{v} = (-1, 1)$ $\quad$ $\vec{u} - \vec{v} = (1, -1)$ $\quad$ $\vec{u} + \vec{v} = (1, 1)$

$-\vec{u} - \vec{v} = (-1, -1)$ $\quad$ $-\vec{u} + 2\vec{v} = (-1, 2)$ $\quad$ $\vec{u} - 2\vec{v} = (1, -2)$

Si las coordenadas de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son $(3, -5)$ y $(-2, 1)$, obtén las coordenadas de:

a) $-2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$ $\quad$ **b)** $-\vec{u} - \frac{3}{5}\vec{v}$ $\quad$ **c)** $\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) - \frac{2}{3}(\vec{u} - \vec{v})$

a) $-2\,(3, -5) + \frac{1}{2}\,(-2, 1) = (-6, 10) + \left(-1, \frac{1}{2}\right) = \left(-7, \frac{21}{2}\right)$

b) $-(3, -5) - \frac{3}{5}\,(-2, 1) = (-3, 15) + \left(\frac{6}{5}, \frac{-3}{5}\right) = \left(\frac{-9}{5}, \frac{72}{5}\right)$

c) $\frac{1}{2}\left[(3, -5) + (-2, 1)\right] - \frac{2}{3}\left[(3, -5) - (-2, 1)\right] = \frac{1}{2}\,(1, -4) - \frac{2}{3}\,(5, -6) =$

$$= \left(\frac{1}{2}, -2\right) + \left(\frac{-10}{3}, 4\right) = \left(\frac{-17}{6}, 2\right)$$

Expresa el vector $\vec{a}(-1, -8)$ como combinación lineal de $\vec{b}(3, -2)$ y $\vec{c}\left(4, -\frac{1}{2}\right)$.

☛ ***Calcula m y n tales que $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$.***

$$(-1, -8) = m(3, -2) + n\left(4, -\frac{1}{2}\right) \;\rightarrow\; \begin{cases} -1 = 3m + 4n \\ -8 = -2m - \frac{1}{2}n \end{cases}$$

Resolvemos el sistema por reducción (por ejemplo).

Para ello, multiplicamos la segunda ecuación por 8 (en los dos miembros) y sumamos miembro a miembro las dos:

$$\begin{array}{r} -1 = \quad 3m + 4n \\ \underline{-64 = -16m - 4n} \\ -65 = -13m \;\rightarrow\; m = \frac{-65}{-13} = 5 \end{array}$$

Sustituyendo en una de las dos ecuaciones y despejando n:

$-1 = 3m + 4n \;\rightarrow\; -1 = 3 \cdot (5) + 4n \;\rightarrow\; -16 = 4n \;\rightarrow\; n = -4$

Así, podemos decir: $\vec{a} = 5\vec{b} - 4\vec{c}$

Dado el vector $\vec{u}(-5, k)$ calcula k de modo que:

a) $\vec{u}$ sea ortogonal a $\vec{v}(4, -2)$.

b) El módulo de $\vec{u}$ sea igual a $\sqrt{34}$.

a) $\vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \rightarrow (-5, k) \cdot (4, -2) = 0 \rightarrow -20 - 2k = 0 \rightarrow k = -10$

b) $|\vec{u}| = \sqrt{(-5)^2 + k^2} = \sqrt{25 + k^2} = \sqrt{34} \rightarrow 25 + k^2 = 34 \rightarrow k^2 = 9 \rightarrow k = \pm 3$

Hay, pues, dos soluciones.

Dados $\vec{a}(2, 1)$ y $\vec{b}(6, 2)$, halla un vector $\vec{v}$ tal que $\vec{v} \cdot \vec{a} = 1$ y $\vec{v} \perp \vec{b}$.

$$\left.\begin{array}{l} (x, y) \cdot (2, 1) = 1 \rightarrow 2x + 2y = 1 \\ (x, y) \cdot (6, 2) = 0 \rightarrow 6x + 2y = 0 \end{array}\right\} \text{ Resolvemos el sistema:}$$

Multiplicamos los dos miembros de la primera ecuación por (–1) y sumamos miembro a miembro:

$$\begin{array}{r} -2x - 2y = -1 \\ 6x + 2y = 0 \\ \hline 4x \quad\quad = -1 \end{array} \rightarrow x = \frac{-1}{4}$$

Sustituimos en una ecuación, por ejemplo en la segunda, y despejamos la otra incógnita:

$$6x + 2y = 0 \rightarrow 6 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right) + 2y = 0 \rightarrow 2y = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \rightarrow y = \frac{3}{4}$$

Así, nuestro vector será: $\vec{v}\left(\frac{-1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

Calcula x para que $\vec{a}(3, x)$ y $\vec{b}(5, 2)$ formen un ángulo de 60°.

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\ |\vec{b}|\ \cos 60°$

$$15 + 2x = \sqrt{9 + x^2} \cdot \sqrt{29} \cdot \frac{1}{2} \rightarrow 30 + 4x = \sqrt{29\,(9 + x^2)} \rightarrow$$

$$\rightarrow 900 + 16x^2 + 240x = 29\,(9 + x^2) \rightarrow 13x^2 + 240x - 639 = 0$$

$$x = \frac{-240 \pm \sqrt{57\,600 + 33\,228}}{26} = \frac{-240 \pm \sqrt{90\,828}}{26} =$$

$$= \frac{-240 \pm 301{,}4}{26} \begin{array}{l} x_1 = -2{,}36 \\ x_2 = 20{,}82 \end{array}$$