TEMA 4 TRIGONOMETRIA	
15	a) $\frac{1}{5} = sen\,\alpha = cos\,(90^\circ - \alpha)$ Sustituimos en la expresión para calcular *sen* (180° − α): $cos^2\,(90^\circ - \alpha) + sen^2\,(90^\circ - \alpha) = 1;\ sen\,(90^\circ - \alpha) = \sqrt{1 - \frac{1}{25}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$ b) $sen\,(180^\circ - \alpha) = sen\,\alpha = \frac{1}{5}$ c) $sen\,(-\alpha) = -sen\,\alpha = -\frac{1}{5}$
16	a) $sen\,72^\circ = sen\,(90^\circ - 18^\circ) = cos\,18^\circ = 0{,}951$ b) $cos\,162^\circ = cos\,(180^\circ - 18^\circ) = -cos\,18^\circ = -0{,}951$ c) $tg\,(-72^\circ) = -tg\,72^\circ = -tg\,(90^\circ - 18^\circ) =$ $= -\frac{1}{tg\,18^\circ} = -\frac{cos\,18^\circ}{sen\,18^\circ} = -\frac{0{,}951}{0{,}309} = -3{,}0777$
18	$sen\,75^\circ = sen\,(30^\circ + 45^\circ) = sen\,30^\circ \cdot cos\,45^\circ + cos\,30^\circ \cdot sen\,45^\circ =$ $= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} = 0{,}97$ $cos\,75^\circ = cos\,(30^\circ + 45^\circ) = cos\,30^\circ \cdot cos\,45^\circ - sen\,30^\circ \cdot sen\,45^\circ =$ $= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} = 0{,}26$ $tg\,75^\circ = tg\,(30^\circ + 45^\circ) = \frac{tg\,30^\circ - tg\,45^\circ}{1 + tg\,30^\circ \cdot tg\,45^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = 3{,}73$ $sen\,22{,}5^\circ = sen\,\frac{45^\circ}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - cos\,45^\circ}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \pm 0{,}38$

39

a) Aplicamos la relación de ángulos complementarios para calcular el tercer ángulo:

$\widehat{C} = 90° - 48° = 42°$

Usamos una de sus razones trigonométricas para hallar otro de sus lados:

$$\frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} \rightarrow \frac{7}{sen\ 48°} = a \rightarrow a = 9{,}42\ \text{m}$$

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener el tercer lado:

$c = \sqrt{9{,}42^2 - 7^2} = 6{,}3\ \text{m}$

b) Aplicamos la relación de ángulos complementarios para hallar el tercer ángulo:

$\widehat{C} = 90° - 28° = 62°$

Usamos una de sus razones trigonométricas para obtener otro de sus lados:

$$\frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{c}{sen\,\widehat{C}} \rightarrow \frac{b}{sen\ 28°} = \frac{12}{sen\,62°} \rightarrow b = 6{,}38\ \text{m}$$

Utilizamos el teorema de Pitágoras para hallar el tercer lado:

$a = \sqrt{12^2 + 6{,}38^2} = 13{,}59\ \text{m}$

c) Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular el tercer lado:

$b = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12\ \text{m}$

$$sen\,\widehat{B} = \frac{12}{13} \rightarrow \widehat{B} = 67°\ 22'\ 48{,}5''$$

$$sen\,\widehat{C} = \frac{5}{13} \rightarrow \widehat{C} = 22°\ 37'\ 11{,}5''$$

d) Aplicamos la relación de ángulos complementarios para obtener el tercer ángulo:

$\widehat{B} = 90° - 42°\ 12' = 47°\ 48'$

Usamos una de sus razones trigonométricas para hallar otro de sus lados:

$$\frac{b}{sen\,\widehat{B}} = \frac{a}{sen\,\widehat{A}} \rightarrow \frac{b}{sen\ 47°\ 48'} = 6 \rightarrow b = 4{,}44\ \text{m}$$

Utilizamos el teorema de Pitágoras para obtener el tercer lado:

$c = \sqrt{6^2 - 4{,}44^2} = 4{,}04\ \text{m}$

e) Aplicamos el teorema de Pitágoras para hallar el tercer lado:

$a = \sqrt{3^2 + 6^2} = 6{,}71\ \text{m}$

$$sen\,\widehat{B} = \frac{3}{6{,}71} \rightarrow \widehat{B} = 26°\ 33'\ 26{,}6''$$

$$sen\,\widehat{C} = \frac{6}{6{,}71} \rightarrow \widehat{C} = 63°\ 26'\ 33{,}4''$$

83	a) $2\,sen\,(\alpha+45°)\cos(\alpha-45°)=$ $=2\,(sen\,\alpha\cdot\cos 45°+\cos\alpha\cdot sen\,45°)(\cos\alpha\cdot\cos 45°+sen\,\alpha\cdot sen\,45°)=$ $=2\left(\frac{\sqrt{2}\cdot sen\,\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2}\cdot sen\,\alpha}{2}\right)=$ $=2\left(\frac{2\cdot\cos^2\alpha}{4}+\frac{4\,sen\,\alpha\cdot\cos\alpha}{4}+\frac{2\cdot sen^2\alpha}{4}\right)=$ $=\cos^2\alpha+sen^2\alpha+2\,sen\,\alpha\cdot\cos\alpha=1+sen\,2\alpha$ b) $2\,sen\,(\alpha+45°)\cos(\alpha+45°)=$ $=2\,(sen\,\alpha\cdot\cos 45°+\cos\alpha\cdot sen\,45°)(\cos\alpha\cdot\cos 45°-sen\,\alpha\cdot sen\,45°)=$ $=2\left(\frac{\sqrt{2}\cdot sen\,\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}\cdot\cos\alpha}{2}-\frac{\sqrt{2}\cdot sen\,\alpha}{2}\right)=$ $=2\left(\frac{2\cdot\cos^2\alpha}{4}-\frac{2\cdot sen^2\alpha}{4}\right)=\cos^2\alpha-sen^2\alpha=\cos 2\alpha$
84	$\frac{1-\cos^2 x}{sen\,2x}=\frac{sen^2 x}{2\,sen\,x\cdot\cos x}=\frac{sen\,x}{2\cos x}=\frac{tg\,x}{2}$
85	$sen\,2\alpha=2\,sen\,\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{2\,sen\,\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\,tg\,\alpha}{\frac{1}{\cos^2\alpha}}=\frac{2\,tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha}$
86	$\frac{2\cos(45°-\alpha)\cos(45°+\alpha)}{\cos 2\alpha}=$ $=\frac{2\left(\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2}+\frac{\sqrt{2}\,sen\,\alpha}{2}\right)\left(\frac{\sqrt{2}\cos\alpha}{2}-\frac{\sqrt{2}\,sen\,\alpha}{2}\right)}{\cos^2\alpha-sen^2\alpha}=\frac{\frac{2(\cos^2\alpha-sen^2\alpha)}{2}}{\cos^2\alpha-sen^2\alpha}=1$
88	$sen\,\alpha\,sen\,(\alpha-\beta)+\cos\alpha\cdot\cos(\alpha-\beta)=$ $=sen\,\alpha\,(sen\,\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot sen\,\beta)+\cos\alpha\,(\cos\alpha\cdot\cos\beta+sen\,\alpha\cdot sen\,\beta)=$ $=sen^2\alpha\cdot\cos\beta-sen\,\alpha\cdot\cos\alpha\cdot sen\,\beta+\cos^2\alpha\cdot\cos\beta+sen\,\alpha\cdot\cos\alpha\cdot sen\,\beta=$ $=\cos\beta\,(sen^2\alpha+\cos^2\alpha)=\cos\beta$
89	$\frac{tg\,a+tg\,b}{tg\,a-tg\,b}=\frac{\frac{sen\,a\cdot\cos b}{\cos a\cdot\cos b}+\frac{\cos a\cdot sen\,b}{\cos a\cdot\cos b}}{\frac{sen\,a\cdot\cos b}{\cos a\cdot\cos b}-\frac{\cos a\cdot sen\,b}{\cos a\cdot\cos b}}=\frac{sen\,a\cdot\cos b+\cos a\cdot sen\,b}{sen\,a\cdot\cos b-\cos a\cdot sen\,b}=\frac{sen\,(a+b)}{sen\,(a-b)}$

91

a) $\cos x \, tg\, x = \dfrac{1}{2}$

b) $\cos 2x + sen\, 2x = 1$

c) $\cos 2x - sen\, 2x = 0$

d) $sen\, 2x + \cos x = 1$

e) $sen\, 2x + sen\, 2x = 0$

f) $tg\, x + sen\, x = 0$

g) $tg\, x - sen\, 2x = 0$

h) $\dfrac{sen\,(60° - x)}{\cos x} = 1$

i) $tg\left(\dfrac{\pi}{4} - x\right) + tg\, x - 1 = 0$

j) $sen\,(x + 30°) + \cos\,(x + 60°) = 1 + \cos 2x$

a) $\cos x \, tg\, x = \dfrac{1}{2} \rightarrow sen\, x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 30° + 360° \cdot k \\ x_2 = 150° + 360° \cdot k \end{cases}$

b) $\cos 2x + sen\, 2x = 1 \rightarrow \cos^2 x - sen^2 x + 2\, sen\, x \cdot \cos x = \cos^2 x + sen^2 x$

$\rightarrow -2\, sen^2 x + 2\, sen\, x \cdot \cos x = 0 \rightarrow 2\, sen\, x\,(-sen\, x + \cos x) = 0$

$sen\, x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360° \cdot k \\ x_2 = 180° + 360° \cdot k \end{cases}$

$sen\, x = \cos x \rightarrow \begin{cases} x_1 = 45° + 360° \cdot k \\ x_2 = 225° + 360° \cdot k \end{cases}$

c) $\cos 2x - sen\, 2x = 0 \rightarrow \cos 2x = sen\, 2x \rightarrow \begin{cases} x_1 = 22{,}5° + 180° \cdot k \\ x_2 = 112{,}5° + 180° \cdot k \end{cases}$

d) $sen\, 2x + \cos x = (2\, sen\, x + 1) \cos x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 90° + 360° \cdot k & x_3 = 210° + k \cdot 360° \\ x_2 = 270° + 360° \cdot k & x_4 = 330° + k \cdot 360° \end{cases}$

e) $sen\, 2x + sen\, 2x = 0 \rightarrow 2\, sen\, 2x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 180° \cdot k \\ x_2 = 90° + 180° \cdot k \end{cases}$

f) $tg\, x + sen\, x = 0 \rightarrow sen\, x \left(\dfrac{1}{\cos x} + 1\right) = 0$

$sen\, x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360° \cdot k \\ x_2 = 180° + 360° \cdot k \end{cases}$

$\dfrac{1}{\cos x} + 1 = 0 \rightarrow x_3 = 180° + 360° \cdot k$

g) $tg\, x - sen\, 2x = 0 \rightarrow \dfrac{sen\, x}{\cos x} - 2\, sen\, x \cdot \cos x = 0 \rightarrow sen\, x(1 - 2\cos^2 x) = 0$

$sen\, x = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0° + 360° \cdot k \\ x_2 = 180° + 360° \cdot k \end{cases}$

$1 - 2\cos^2 x = 0 \rightarrow \cos x = \sqrt{\dfrac{1}{2}} \rightarrow x_3 = 45° + 360° \cdot k$

h) $\dfrac{sen\,(60° - x)}{\cos x} = 1 \rightarrow \dfrac{\sqrt{3}\, \cos x - sen\, x}{2 \cos x} = 1 \rightarrow \sqrt{3} - tg\, x = 2$

$\rightarrow tg\, x = -0{,}2679 \rightarrow x = 345° + 360° \cdot k$

93

a) $4\,sen\,x - sec\,x = 0 \rightarrow 4\,sen\,x \cdot cos\,x - 1 = 0 \rightarrow 2\,sen\,2x = 1 \rightarrow sen\,2x = \dfrac{1}{2}$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 15^\circ + 180^\circ \cdot k \\ x_2 = 75^\circ + 180^\circ \cdot k \end{cases}$$

b) $\dfrac{cos^2\,x}{2\,cos\,x + sen\,x} = sen\,x \rightarrow cos^2\,x = 2\,cos\,x \cdot sen\,x + sen^2\,x \rightarrow cos\,2x = sen\,2x$

$$\rightarrow \begin{cases} x_1 = 22{,}5^\circ + 180^\circ \cdot k \\ x_2 = 112{,}5^\circ + 180^\circ \cdot k \end{cases}$$

c) $\dfrac{1}{cos\,x + sen\,x} + 2\,sen\,x = 2\,cos\,x \rightarrow \dfrac{2\,sen\,x \cdot cos\,x + 2\,sen^2\,x}{2\,cos^2\,x + 2\,sen\,x \cdot cos\,x} = 1$

$$\rightarrow \frac{sen\,x(cos\,x + sen\,x)}{cos\,x(cos\,x + sen\,x)} = 1 \rightarrow tg\,x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 45^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 225^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

d) $sen\,x\,(sen\,x - 1) = 5\,cos^2\,x - 4 \rightarrow sen^2\,x - sen\,x = 5(1 - sen^2\,x) - 4$

$6\,sen^2\,x - sen\,x - 1 = 0$

$$\rightarrow sen\,x = -\frac{1}{3} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 340^\circ\,31'\,44'' + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 199^\circ\,28'\,16'' + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

$$\rightarrow sen\,x = \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 30^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 150^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

e) $2\,cos\,x - 1 = sec\,x \rightarrow 2\,cos^2\,x - cos\,x - 1 = 0$

$$\rightarrow cos\,x = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 0^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 180^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

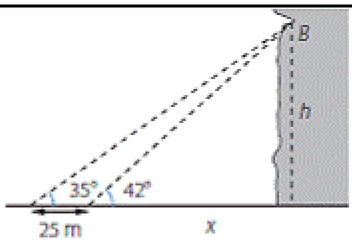
$$\rightarrow cos\,x = -\frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 120^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 240^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

f) $2\,cos\,x + sen\,x = 1 \rightarrow \sqrt{1 - cos^2\,x} = 1 - 2\,cos\,x \rightarrow 5\,cos^2\,x - 4\,cos\,x = 0$

$$\rightarrow cos\,x(5\,cos\,x - 4) = 0 \rightarrow cos\,x = \frac{4}{5} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 36^\circ\,52'\,11{,}6'' + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 323^\circ\,7'\,48{,}4'' + 360^\circ \cdot k \end{cases}$$

g) $sen\,x + cos\,x = 0 \rightarrow sen\,x = -cos\,x \rightarrow \begin{cases} x_1 = 135^\circ + 360^\circ \cdot k \\ x_2 = 315^\circ + 360^\circ \cdot k \end{cases}$

94

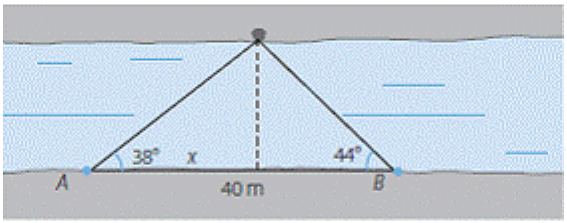


Llamamos *h* a la altura a la que está *B*.

$$\left.\begin{aligned} tg\,35^\circ &= \frac{h}{25 + x} \\ tg\,42^\circ &= \frac{h}{x} \end{aligned}\right\} \xrightarrow{x = 1{,}11h} h = 17{,}51 + 0{,}63h \rightarrow h = 47{,}38 \text{ m}$$

El punto *B* está a una altura de 47,38 m.

95



Llamamos h a la anchura del río.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 38° = \dfrac{h}{x} \\ tg\ 44° = \dfrac{h}{40 - x} \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 1,28h} 38,63 - 1,24h = h \rightarrow h = 17,25 \text{ m}$$

La anchura del río es 17,25 m.

96

Llamamos h a la altura del mástil.

$$\left.\begin{array}{l} tg\ 43° = \dfrac{h}{x} \\ tg\ 57°\ 50' = \dfrac{h}{15 - x} \end{array}\right\} \xrightarrow{x = 1,07h} 23,85 - 1,7h = h \rightarrow h = 8,83 \text{ m}$$

La altura del mástil es 8,83 m.

97

a) El ángulo desconocido mide: $90° - 60° = 30°$

b) Tomamos como base y altura los catetos del triángulo rectángulo:

$$28 = \frac{b \cdot a}{2} \rightarrow b = \frac{56}{a}$$

$$tg\ 30° = \frac{\frac{56}{a}}{a} \rightarrow a = \sqrt{\frac{56}{tg\ 30°}} = 9,85 \text{ cm}$$

$b = 5,68$ cm

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la hipotenusa:

$$c = \sqrt{9,85^2 + 5,68^2} = 11,37 \text{ cm}$$

Los lados miden 11,37; 5,68 y 9,85 cm.

El perímetro es 26,9 cm.

98	$tg\ 52° = \dfrac{y}{x+4}$, $tg\ 61° = \dfrac{y}{x}$ $\xrightarrow{y=1,8x}$ $1{,}28x + 5{,}12 = 1{,}8x \rightarrow x = 9{,}84 \rightarrow y = 17{,}75$ Aplicamos el teorema de Pitágoras para saber la cantidad de sedal que va a necesitar el pescador A: $9{,}84 + 4 = 13{,}84$ $a = \sqrt{13{,}84^2 + 17{,}75^2} = 22{,}51$ m El pescador A necesita 22,51 m de sedal. Aplicamos el teorema de Pitágoras para saber la cantidad de sedal que va a necesitar el pescador B: $a = \sqrt{9{,}84^2 + 17{,}75^2} = 20{,}3$ m El pescador B necesita 20,3 m de sedal.
75	a) $0{,}83^2 + cos^2\ 56° = 1 \rightarrow cos\ 56° = \sqrt{1 - 0{,}83^2} = 0{,}56$ $tg\ 56° = \dfrac{0{,}83}{0{,}56} = 1{,}48$ $sen^2\ 23° + 0{,}92^2 = 1 \rightarrow sen\ 23° = \sqrt{1 - 0{,}92^2} = 0{,}39$ $tg\ 23° = \dfrac{0{,}39}{0{,}92} = 0{,}42$ b) $sen\ 79° = sen\ (56° + 23°) = sen\ 56° \cdot cos\ 23° + cos\ 56° \cdot sen\ 23° = 0{,}83 \cdot 0{,}92 + 0{,}56 \cdot 0{,}39 = 0{,}98$ $cos\ 79° = cos\ (56° + 23°) = cos\ 56° \cdot cos\ 23° - sen\ 56° \cdot sen\ 23° = 0{,}56 \cdot 0{,}92 - 0{,}83 \cdot 0{,}39 = 0{,}19$ $tg\ 79° = tg\ (56° + 23°) = \dfrac{tg\ 56° + tg\ 23°}{1 - tg\ 56° \cdot tg\ 23°} = \dfrac{1{,}48 + 0{,}42}{1 - 1{,}48 \cdot 0{,}42} = 5{,}02$ c) $sen\ 33° = sen\ (56° - 23°) = sen\ 56° \cdot cos\ 23° - cos\ 56° \cdot sen\ 23° = 0{,}83 \cdot 0{,}92 - 0{,}56 \cdot 0{,}39 = 0{,}55$ $cos\ 33° = cos\ (56° - 23°) = cos\ 56° \cdot cos\ 23° + sen\ 56° \cdot sen\ 23° = 0{,}56 \cdot 0{,}92 + 0{,}83 \cdot 0{,}39 = 0{,}84$ $tg\ 33° = tg\ (56° - 23°) = \dfrac{tg\ 56° - tg\ 23°}{1 + tg\ 56° \cdot tg\ 23°} = \dfrac{1{,}48 - 0{,}42}{1 + 1{,}48 \cdot 0{,}42} = 0{,}65$ d) $sen\ 28° = sen\ \dfrac{56°}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - cos\ 56°}{2}} = \sqrt{\dfrac{1 - 0{,}56}{2}} = 0{,}47$ $cos\ 28° = cos\ \dfrac{56°}{2} = \sqrt{\dfrac{1 + cos\ 56°}{2}} = \sqrt{\dfrac{1 + 0{,}56}{2}} = 0{,}88$ $tg\ 28° = tg\ \dfrac{56°}{2} = \sqrt{\dfrac{1 - cos\ 56°}{1 + cos\ 56°}} = \sqrt{\dfrac{1 - 0{,}56}{1 + 0{,}56}} = 0{,}53$ e) $sen\ 46° = sen\ (2 \cdot 23°) = 2 \cdot sen\ 23° \cdot cos\ 23° = 2 \cdot 0{,}39 \cdot 0{,}92 = 0{,}72$ $cos\ 46° = cos\ (2 \cdot 23°) = cos^2\ 23° - sen^2\ 23° = 0{,}92^2 - 0{,}39^2 = 0{,}69$ $tg\ 46° = tg\ (2 \cdot 23°) = \dfrac{2 \cdot tg\ 23°}{1 - tg^2\ 23°} = \dfrac{2 \cdot 0{,}42}{1 - 0{,}42^2} = 1{,}02$

72

$$sen\,75° = sen\,(30° + 45°) = sen\,30° \cdot cos\,45° + cos\,30° \cdot sen\,45° =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$cos\,75° = cos\,(30° + 45°) = cos\,30° \cdot cos\,45° - sen\,30° \cdot sen\,45° =$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$tg\,75° = tg\,(30° + 45°) = \frac{tg\,30° + tg\,45°}{1 - tg\,30° \cdot tg\,45°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 + \sqrt{3}$$

$$sen\,105° = sen\,(45° + 60°) = sen\,45° \cdot cos\,60° + cos\,45° \cdot sen\,60° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

$$cos\,105° = cos\,(45° + 60°) = cos\,45° \cdot cos\,60° - sen\,45° \cdot sen\,60° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$$

$$tg\,105° = tg\,(45° + 60°) = \frac{tg\,45° + tg\,60°}{1 - tg\,45° \cdot tg\,60°} = \frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} = -2 - \sqrt{3}$$

$$sen\,15° = sen\,(45° - 30°) = sen\,45° \cdot cos\,30° - cos\,45° \cdot sen\,30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$cos\,15° = cos\,(45° - 30°) = cos\,45° \cdot cos\,30° + sen\,45° \cdot sen\,30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$tg\,15° = tg\,(45° - 30°) = \frac{tg\,45° - tg\,30°}{1 + tg\,45° \cdot tg\,30°} = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}} = 2 - \sqrt{3}$$