

EJERCICIOS RESUELTOS DE GEOMETRÍA AFÍN

Estudia la posición de los siguientes planos según los valores de m :

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ my + z = 0 \\ x + (1+m)y + mz = m + 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ my + z = 0 \\ x + (1+m)y + mz = m + 1 \end{cases} \right\} M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & m & 1 & 0 \\ 1 & 1+m & m & m+1 \end{array} \right)$$

$$|M| = m^2 - m = 0 \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

• Si $m = 0$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ El } 1^\circ \text{ y el } 3^\circ \text{ son el mismo plano; el } 2^\circ \text{ los corta. Por tanto, se cortan en una recta.}$$

• Si $m = 1$, queda:

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ y } |M| = 0 \rightarrow \text{ran}(M) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{ran}(M') = 3$$

Los planos se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a los tres.

• Si $m \neq 0$ y $m \neq 1 \rightarrow \text{ran}(M) = \text{ran}(M') = 3$. Los planos se cortan en un punto.

Halla la ecuación de la recta r que pasando por el punto $P(2, 0, -1)$ corta a las rectas:

$$s_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1} \quad s_2: \begin{cases} x+y+4=0 \\ y-3z+3=0 \end{cases}$$

Escribamos las dos rectas en forma paramétrica:

$$s_1: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \quad s_2: \begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = -3 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

La recta r está determinada por los siguientes planos:

$$\alpha: \text{ contiene a la recta } s_1 \text{ y al punto } P: \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\beta: \text{ contiene a la recta } s_2 \text{ y al punto } P: \begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{Así, } r: \begin{cases} x - 2z - 4 = 0 \\ x + 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

Considera estas rectas:

$$r: \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = -1 + 2\lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \quad s: \begin{cases} 4x + 5y + 7 = 0 \\ 3y - 4z + 7 - m = 0 \end{cases}$$

a) Calcula el valor de m para que estén en un mismo plano.

b) Escribe la ecuación de dicho plano.

$$a) \left. \begin{array}{l} \vec{d}_r(1, 2, 1) \\ \vec{d}_s = (4, 5, 0) \times (0, 3, -4) = (-20, 16, 12) // (-5, 4, 3) \end{array} \right\}$$

Como las rectas no son paralelas ni coincidentes, para que estén en un mismo plano se han de cortar en un punto. Imponemos esta condición. Para averiguar el punto de corte, sustituimos las coordenadas de un punto de r en las ecuaciones de s y resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} 4(3 + \lambda) + 5(-1 + 2\lambda) + 7 = 0 \rightarrow 14\lambda + 14 = 0 \rightarrow \lambda = -1 \\ 3(-1 + 2\lambda) - 4(2 + \lambda) + 7 - m = 0 \rightarrow 2\lambda - 4 - m = 0 \rightarrow -6 - m = 0 \rightarrow m = -6 \end{cases}$$

Por tanto, para que las rectas estén en un mismo plano, ha de ser $m = -6$.

c) Si $m = -6$, las rectas se cortan en el punto $(2, -3, 1)$ (lo obtenemos haciendo $\lambda = -1$ en las ecuaciones de r).

El plano que buscamos pasará por ese punto y será paralelo a \vec{d}_r y a \vec{d}_s . Luego, un vector normal al plano será:

$$(1, 2, 1) \times (-5, 4, 3) = (2, -8, 14) \rightarrow \vec{n}(1, -4, 7)$$

La ecuación del plano es: $1(x - 2) - 4(y + 3) + 7(z - 1) = 0$

$$x - 4y + 7z - 21 = 0$$

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(1, 2, 3)$ y es perpendicular al plano que pasa por el origen y por los puntos $B(1, 1, 1)$ y $C(1, 2, 1)$.

Un vector normal al plano es: $\vec{OB} \times \vec{OC} = (1, 1, 1) \times (1, 2, 1) = (-1, 0, 1)$

Este vector es un vector dirección de la recta que buscamos.

Las ecuaciones de la recta son:

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

Dados los planos $mx + 2y - 3z - 1 = 0$ y $2x - 4y + 6z + 5 = 0$, halla m para que sean:

a) Paralelos.

b) Perpendiculares.

a) Las coordenadas de $(m, 2, -3)$ y de $(2, -4, 6)$ han de ser proporcionales:

$$\frac{m}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{-3}{6} \rightarrow m = -1$$

b) $(m, 2, -3) \cdot (2, -4, 6) = 2m - 8 - 18 = 2m - 26 = 0 \rightarrow m = 13$

Sean la recta $r: \begin{cases} 3x - y + z = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases}$ y el plano $ax - y + 4z - 2 = 0$.

a) Calcula el valor de a para que r sea paralela al plano.

b) ¿Existe algún valor de a para el cual r sea perpendicular al plano?

Un vector dirección de r es: $\vec{d} = (3, -1, 1) \times (2, 0, -1) = (1, 5, 2)$

Un vector normal al plano es $\vec{n} = (a, -1, 4)$.

a) Para que r sea paralela al plano, \vec{d} y \vec{n} han de ser perpendiculares:

$$(1, 5, 2) \cdot (a, -1, 4) = a - 5 + 8 = a + 3 = 0 \rightarrow a = -3$$

b) Los vectores \vec{d} y \vec{n} deberían tener sus coordenadas proporcionales.

Como $\frac{5}{-1} \neq \frac{2}{4}$, no es posible; es decir, *no* existe ningún valor de a para el cual r sea perpendicular al plano.

Dadas las rectas r y s :

$$r: \frac{x-3}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \quad s: \begin{cases} x = \mu \\ y = -\mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

Halla los puntos que dan la mínima distancia y determina la ecuación de la perpendicular común a r y s .

Un punto genérico de r es $R(3 + 2\lambda, \lambda, 1 + \lambda)$

Un punto genérico de s es $S(\mu, -\mu, -\mu)$

Un vector genérico de origen en r y extremo en s es:

$$\vec{RS}(-3 - 2\lambda + \mu, -\lambda - \mu, -1 - \lambda - \mu)$$

Este vector debe ser perpendicular a r y a s :

$$\begin{cases} \vec{RS} \cdot (2, 1, 1) = 0 \rightarrow -6\lambda - 7 = 0 \rightarrow \lambda = -\frac{7}{6} \\ \vec{RS} \cdot (1, -1, -1) = 0 \rightarrow -2 + 3\mu = 0 \rightarrow \mu = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Los puntos que dan la mínima distancia son:

$$R\left(\frac{2}{3}, -\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}\right) \text{ y } S\left(\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)$$

Calcula el ángulo que forman los planos $\alpha: z = 3$ y $\beta: x - y + 2z + 4 = 0$.

$$\vec{n}_\alpha(0, 0, 1); \vec{n}_\beta(1, -1, 2)$$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha| |\vec{n}_\beta|} = \frac{2}{1\sqrt{6}} = 0,816 \rightarrow \alpha = 35^\circ 15' 52''$$

Halla la ecuación de la proyección ortogonal r' de la recta

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{2} \text{ sobre el plano } \alpha: x - 3y + 2z + 12 = 0.$$

La proyección ortogonal de r sobre α es la recta intersección del plano α con otro plano π , perpendicular a α y que contiene a r .

$$P(1, 1, 2); \vec{d}_r(2, 1, 2); \vec{n}(1, -3, 2)$$

$$\vec{d}_r \times \vec{n} = (2, 1, 2) \times (1, -3, 2) = (8, -2, -7)$$

La ecuación de π es: $8(x-1) - 2(y-1) - 7(z-2) = 0$
 $\pi: 8x - 2y - 7z + 8 = 0$

La proyección ortogonal de r sobre α es:

$$r': \begin{cases} x - 3y + 2z + 12 = 0 \\ 8x - 2y - 7z + 8 = 0 \end{cases}$$

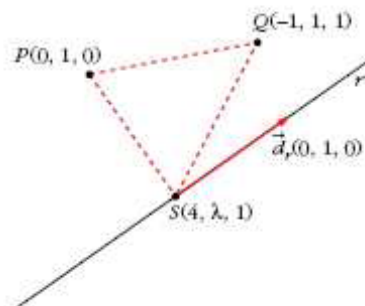
Los puntos $P(0, 1, 0)$ y $Q(-1, 1, 1)$ son dos vértices de un triángulo, y el tercero, S , pertenece a la recta $r: \begin{cases} x = 4 \\ z = 1 \end{cases}$. La recta que contiene a P y a S es perpendicular a la recta r .

- a) Determina las coordenadas de S .
 b) Calcula el área del triángulo PQS .

a) $\vec{PS} \perp \vec{d}_r \rightarrow \vec{PS} \cdot \vec{d}_r = 0$
 $(4, \lambda - 1, 1) \cdot (0, 1, 0) = \lambda - 1 = 0 \rightarrow \lambda = 1$
 $S(4, 1, 1)$

b) $\vec{PS}(4, 0, 1)$ $\vec{PQ}(-1, 0, 1)$
 $\vec{PS} \times \vec{PQ} = (4, 0, 1) \times (-1, 0, 1) = (0, -5, 0)$

$$\text{Área} = \frac{|\vec{PS} \times \vec{PQ}|}{2} = \frac{5}{2} = 2,5 \text{ u}^2$$



Dados la recta $r: \frac{x}{2} = \frac{1-y}{1} = \frac{z+1}{3}$ y el plano $\pi: x + 3y - 3z + 3 = 0$,
 halla el plano que contiene a r y es perpendicular a π .

$$r: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{3} \rightarrow P(0, 1, -1); \vec{d}(2, -1, 3)$$

$$\pi: x + 3y - 3z + 3 = 0 \rightarrow \vec{n}(1, 3, -3)$$

El plano será paralelo a \vec{d} y a \vec{n} y contendrá a P .

Un vector normal será: $(2, -1, 3) \times (1, 3, -3) = (-6, 9, 7) \rightarrow (6, -9, -7)$

La ecuación del plano es: $6(x-0) - 9(y-1) - 7(z+1) = 0$
 $6x - 9y - 7z + 2 = 0$

Halla la distancia entre el punto $P(2, 1, 3)$ y la recta $r: \begin{cases} 2x - y - z - 3 = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{cases}$

- Escribimos la recta r en forma paramétrica:

$$\begin{cases} 2x - y = 3 + z \\ x - y = 2 - z \end{cases} \text{ Restando: } \begin{cases} x = 1 + 2z \\ y = x + z - 2 = -1 + 3z \end{cases} \quad r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

- Hallamos la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r :

$$2(x-2) + 3(y-1) + 1(z-3) = 0$$

$$\pi: 2x + 3y + z - 10 = 0$$

- Obtenemos el punto de corte de r con π :

$$2(1 + 2\lambda) + 3(-1 + 3\lambda) + \lambda - 10 = 0$$

$$2 + 4\lambda - 3 + 9\lambda + \lambda - 10 = 0$$

$$14\lambda - 11 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{11}{14}$$

El punto de corte es $Q\left(\frac{18}{7}, \frac{19}{14}, \frac{11}{14}\right)$.

- Calculamos la distancia:

$$\text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, Q) = |\vec{PQ}| = \left| \left(\frac{4}{7}, \frac{5}{14}, \frac{-31}{14} \right) \right| = \sqrt{\frac{1050}{196}} = \sqrt{\frac{75}{14}} = 2,31$$

Determina las condiciones que deben cumplir a y b para que estos tres planos: $ax + z - 1 = 0$, $x + bz + 2 = 0$, $\sqrt{5}x + 3y + 2z - 3 = 0$ se corten en un punto.

Haciendo $a = 2$ y $b = 1$, obtén las ecuaciones paramétricas de la recta determinada por los dos primeros, así como el ángulo que esta forma con el tercero.

$\begin{cases} ax + z = 1 \\ x + bz = -2 \\ \sqrt{5}x + 3y + 2z = 3 \end{cases}$ Para que los tres planos se corten en un punto, el sistema ha de tener solución única, es decir:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & b \\ \sqrt{5} & 3 & 2 \end{vmatrix} = -3(ab - 1) \neq 0 \rightarrow ab \neq 1$$

- Si $a = 2$ y $b = 1$, la recta determinada por los dos primeros planos es:

$$\begin{cases} 2x + z - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases} \text{ Restando: } \begin{cases} x - 3 = 0 \rightarrow x = 3 \\ z = -2 - x = -2 - 3 = -5 \end{cases}$$

$$\text{Ecuaciones paramétricas: } \begin{cases} x = 3 \\ y = \lambda \\ z = -5 \end{cases}$$

- Ángulo que forma la recta con el 3^{er} plano:

$$\vec{d}(0, 1, 0) \quad \vec{n}(\sqrt{5}, 3, 2)$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \frac{|\vec{d} \cdot \vec{n}|}{|\vec{d}| |\vec{n}|} = \frac{3}{1\sqrt{18}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow 90^\circ - \alpha = 45^\circ \rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Los vértices del triángulo ABC son los puntos de corte del plano $2x + y - 3z = 6$ con los ejes coordenados. Halla la ecuación de la altura que parte del vértice B que está en el eje OY .

Los vértices del triángulo son:

$$y - z = 0 \rightarrow 2x = 6 \rightarrow x = 3 \rightarrow A(3, 0, 0)$$

$$x - z = 0 \rightarrow y = 6 \rightarrow B(0, 6, 0)$$

$$x - y = 0 \rightarrow -3z = 6 \rightarrow z = -2 \rightarrow C(0, 0, -2)$$

Debemos hallar la ecuación de la altura que parte de B .

Su vector dirección $\vec{d}(a, b, c)$ debe ser:

— Ortogonal a $\vec{AC} \rightarrow \vec{AC} \cdot \vec{d} = 0$

— Ortogonal al vector normal del plano ABC , es decir, del plano $2x + y - 3z = 6$, puesto que la altura debe estar contenida en dicho plano $\rightarrow (2, 1, -3) \cdot \vec{d} = 0$

Luego tenemos que:

$$\left. \begin{aligned} \vec{AC} \cdot \vec{d} = 0 &\rightarrow (-3, 0, -2) \cdot (a, b, c) = 0 \rightarrow 3a + 2c = 0 \\ (2, 1, -3) \cdot \vec{d} = 0 &\rightarrow (2, 1, -3) \cdot (a, b, c) = 0 \rightarrow 2a + b - 3c = 0 \end{aligned} \right\}$$

Soluciones: $(-2t, 13t, 3t) \rightarrow$ Si $t = -1$, $\vec{d}(2, -13, -3)$

Ecuación de la altura que pasa por B :

$$\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 6 - 13\lambda \\ z = -3\lambda \end{cases}$$