23

Calcula los vértices del triángulo simétrico al formado por los puntos $A(0, -1, 2)$, $B(-1, 2, 0)$ y $C(2, 0, -1)$.

a) Respecto del origen de coordenadas.

b) Respecto de la recta $r: (x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda(1, 1, 1)$.

a) Calculamos el simétrico del punto A respecto de $O(0, 0, 0)$.

$$(0,0,0) = \left(\frac{a_1' + 0}{2}, \frac{a_2' - 1}{2}, \frac{a_3' + 2}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} a_1' = 0 \\ a_2' = 1 \\ a_3' = -2 \end{cases} \rightarrow A'(0, 1, -2)$$

Hallamos el simétrico del punto B respecto de $O(0, 0, 0)$.

$$(0,0,0) = \left(\frac{b_1' - 1}{2}, \frac{b_2' + 2}{2}, \frac{b_3' + 0}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} b_1' = 1 \\ b_2' = -2 \\ b_3' = 0 \end{cases} \rightarrow B'(1, -2, 0)$$

Calculamos el simétrico del punto C respecto de $O(0, 0, 0)$.

$$(0,0,0) = \left(\frac{c_1' + 2}{2}, \frac{c_2' + 0}{2}, \frac{c_3' - 1}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} c_1' = -2 \\ c_2' = 0 \\ c_3' = 1 \end{cases} \rightarrow C'(-2, 0, 1)$$

El triángulo simétrico respecto al origen tendrá por vértices A', B' y C'.

b) Escribimos la recta en forma continua.

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}$$

- Punto simétrico de A respecto a r.

Calculamos la proyección ortogonal Q_A del punto A sobre r.

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Vector normal:} & \vec{n} = (1, 1, 1) \\ \text{Punto:} & A(0, -1, 2) \end{array}\right\} \rightarrow \pi: x + y + z - 1 = 0$$

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y-1}{1} = \dfrac{z-1}{1} \\ x + y + z - 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x = y \\ x = z \\ x + y + z - 1 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} \\ z = \dfrac{1}{3} \end{cases} \rightarrow Q_A\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Hallamos el punto simétrico $A'(a_1', a_2', a_3')$ respecto de la proyección Q_A.

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{0 + a_1'}{2}, \frac{-1 + a_2'}{2}, \frac{2 + a_3'}{2}\right) \rightarrow \begin{cases} a_1' = \dfrac{2}{3} \\ a_2' = \dfrac{5}{3} \\ a_3' = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

El punto simétrico de A respecto de r es $A'\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)$.

- Punto simétrico de B respecto de r.

  Calculamos la proyección ortogonal Q_B del punto B sobre r.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Vector normal:} & \vec{n}=(1,1,1)\\ \text{Punto:} & B(-1,2,0)\end{array}\right\}\rightarrow \pi: x+y+z+1=0$$

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}\\ x+y+z+1=0\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r}x=y\\ x=z\\ x+y+z+1=0\end{array}\right\}\rightarrow \begin{cases}x=-\dfrac{1}{3}\\ y=-\dfrac{1}{3}\rightarrow Q_B\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)\\ z=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

  Hallamos el punto simétrico $B'(b'_1, b'_2, b'_3)$ respecto de la proyección Q_B.

$$\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{-1+b'_1}{2},\frac{2+b'_2}{2},\frac{0+b'_3}{2}\right)\rightarrow\begin{cases}b'_1=\dfrac{2}{3}\\ b'_2=\dfrac{8}{3}\\ b'_3=-\dfrac{2}{3}\end{cases}$$

  El punto simétrico de B respecto de r es $B'\left(\dfrac{1}{3},-\dfrac{8}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$.

- Punto simétrico de C respecto a r.

  Calculamos la proyección ortogonal Q_C del punto C sobre r.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Vector normal:} & \vec{n}=(1,1,1)\\ \text{Punto:} & C(2,0,-1)\end{array}\right\}\rightarrow \pi: x+y+z-1=0$$

$$\left.\begin{array}{r}\dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}\\ x+y+z-1=0\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{r}x=y\\ x=z\\ x+y+z-1=0\end{array}\right\}\rightarrow \begin{cases}x=\dfrac{1}{3}\\ y=\dfrac{1}{3}\rightarrow Q_C\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3}\right)\\ z=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

  Hallamos el punto simétrico $C'(c'_1, c'_2, c'_3)$ respecto de la proyección Q_C.

$$\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{2+c'_1}{2},\frac{0+c'_2}{2},\frac{-1+c'_3}{2}\right)\rightarrow\begin{cases}c'_1=-\dfrac{4}{3}\\ c'_2=\dfrac{2}{3}\\ c'_3=\dfrac{5}{3}\end{cases}$$

  El punto simétrico de C respecto de r es $C'\left(-\dfrac{4}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{3}\right)$.

  El triángulo simétrico respecto a la recta r tendrá por vértices A', B' y C'.

33 Calcula la distancia entre los siguientes pares de rectas.

a) $r: \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}$ $\qquad$ $s: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{-1}$

b) $r: \frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{-1}$ $\qquad$ $s: \left.\begin{matrix} 2x - 3y = 0 \\ 2y - 3z = 0 \end{matrix}\right\}$

a) Estudiamos la posición relativa de r y s.

$\vec{v}_r = (2, 3, -1)$ $\qquad$ $\left.\begin{matrix} P_r(0, 0, 0) \\ Q_s(0, -1, 0) \end{matrix}\right\} \rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s} = (0, -1, 0)$

$\vec{v}_s = (1, -3, -1)$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{pmatrix} = 3 \rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

Por tanto, $d(r, s) = d(s, \pi_r)$, siendo π_r el plano que contiene a r y es paralelo a s.

$$\pi_r: \begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = -6x + y - 9z = 0 \rightarrow \pi_r: 6x - y + 9z = 0$$

$$d(s, \pi_r) = d(Q_s, \pi_r) = \frac{|6 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) + 9 \cdot 0|}{\sqrt{6^2 + (-1)^2 + 9^2}} = \frac{1}{\sqrt{118}} = \frac{\sqrt{118}}{118}$$

b) La forma continua de la recta s es: $\frac{x-0}{9} = \frac{y-0}{6} = \frac{z-0}{4}$

Estudiamos la posición relativa de r y s.

$\vec{v}_r = (-1, -1, -1)$ $\qquad$ $\left.\begin{matrix} P_r(-1, -1, -1) \\ Q_s(0, 0, 0) \end{matrix}\right\} \rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s} = (1, 1, 1)$

$\vec{v}_s = (9, 6, 4)$

$$\text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 9 & 6 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

Como $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ no son proporcionales, las rectas son secantes $\rightarrow d(r, s) = 0$.

119 a) Calcula las ecuaciones implícitas de la recta r_1 que pasa por los puntos $A(1, 2, 3)$ y $B(2, 2, 3)$.

b) Calcula la ecuación general del plano π que pasa por los puntos A, B y $C(2, 2, 4)$.

c) ¿Cuántos planos distintos pueden formarse con los puntos A, B, C y $D(1, 2, 4)$? Justifica tu respuesta.

d) Prueba que los puntos A, B, C y D anteriores forman un cuadrado y calcula su área.

(Cantabria. Junio 2005. Bloque 3. Opción A)

a) $\left.\begin{matrix} A(1, 2, 3) \\ \overrightarrow{AB} = (1, 0, 0) \end{matrix}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{matrix} x = 1 + \lambda \\ y = 2 \\ z = 3 \end{matrix}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{matrix} y = 2 \\ z = 3 \end{matrix}\right\}$

b) $\left.\begin{matrix} A(1, 2, 3) \\ \overrightarrow{AB} = (1, 0, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (1, 0, 1) \end{matrix}\right\} \rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = y - 2 = 0$

c) $\pi: y - 2 = 0 \xrightarrow{D(1, 2, 4)} 2 - 2 = 0 \rightarrow D \in \pi$

Con los puntos A, B, C y D sólo puede formarse un plano.

d) $\overrightarrow{AB} = (1, 0, 0)$ $\qquad$ $\overrightarrow{BC} = (0, 0, 1)$

$\overrightarrow{CD} = (-1, 0, 0)$ $\qquad$ $\overrightarrow{DA} = (0, 0, -1)$

Estos vectores son de módulo uno y además paralelos dos a dos, por tanto, generan un cuadrado de área 1.

122 La trayectoria de un proyectil viene dada por la recta: $r: \left.\begin{array}{l} x = 2 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{array}\right\}$.

a) Estudia si el proyectil impacta con la superficie determinada por el plano.

b) Calcula el punto de impacto y la distancia recorrida por el proyectil desde el punto inicial $P(2, 3, 1)$ hasta el punto de impacto.

(Murcia. Junio 2006. Bloque 2. Cuestión B)

a) $$\left.\begin{array}{r} x = 2 - \lambda \\ y = 3 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \\ 3x + y - z = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 5 \\ z = 5 \\ \lambda = 2 \end{array}\right.$$

Este sistema tiene solución, por tanto, el proyectil impacta con la superficie determinada por el plano.

b) El punto del impacto es $Q(0, 5, 5)$.

$$d(P, Q) = |\overrightarrow{PQ}| = |(-2, 2, 4)| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

123 Halla los puntos de la recta $r: x - 1 = y + 2 = z$ que equidistan de los planos $\pi_1: 4x - 3z - 1 = 0$ y $\pi_2: 3x + 4y - 1 = 0$.

(Cataluña. Junio 2007. Cuestión 4)

Un punto genérico de la recta r es $P(1 + \lambda, -2 + \lambda, \lambda)$.

$$d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2) \rightarrow \frac{|4 + 4\lambda - 3\lambda - 1|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{|3 + 3\lambda - 8 + 4\lambda - 1|}{\sqrt{9 + 16}}$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3 + \lambda = 7\lambda - 6 \rightarrow \lambda = \dfrac{3}{2} \\ 3 + \lambda = -7\lambda + 6 \rightarrow \lambda = \dfrac{3}{8} \end{array}\right.$$

Los puntos son $Q_1\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ y $Q_2\left(\frac{11}{8}, -\frac{13}{8}, \frac{3}{8}\right)$.

127 Halla razonadamente las ecuaciones de los dos planos paralelos al plano π de ecuación $\pi: 12x + 3y - 4z = 7$ que distan 6 unidades de π.

(C. Valenciana. Junio 2001. Ejercicio A. Problema 1)

π_1 paralelo al plano $\pi \rightarrow \pi_1: 12x + 3y - 4z + D_1 = 0$

π_2 paralelo al plano $\pi \rightarrow \pi_2: 12x + 3y - 4z + D_2 = 0$

Como $A(0, 1, -1) \in \pi$:

$$d(\pi, \pi_1) = d(A, \pi_1) = \frac{|12 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 4 \cdot (-1) + D|}{\sqrt{12^2 + 3^2 + (-4)^2}} = 6$$

$$|D + 7| = 78 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} D = 71 \\ D = -85 \end{array}\right.$$

Los planos son: $\pi_1: 12x + 3y - 4z + 71 = 0$ y $\pi_2: 12x + 3y - 4z - 85 = 0$

130

Halla la distancia del plano $\pi: 4x - 10y + 2z = -1$ al plano $\sigma: \left.\begin{array}{l} x = 2\lambda + 3\mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = \lambda - \mu \end{array}\right\}$.

(Galicia. Junio 2002. Bloque 2. Pregunta 1)

Determinamos sus posiciones relativas.

$$\left.\begin{array}{r} A(0, 0, 0) \\ \vec{u}_\sigma = (2, 1, 1) \\ \vec{v}_\sigma = (3, 1, -1) \end{array}\right\} \to \sigma: \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2x + 5y - z = 0 \to n_\sigma = (-2, 5, -1)$$

$\pi: 4x - 10y + 2z = -1 \to \vec{n}_\pi = (4, -10, 2)$

$\vec{n}_\sigma$ y $\vec{n}_\pi$ son proporcionales $\to$ σ y π son paralelos.

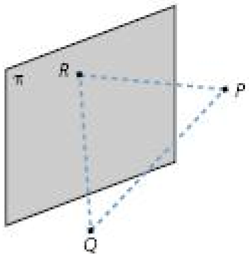
La distancia entre los dos planos es igual a la distancia entre un punto $A(0, 0, 0) \in \sigma$ y el plano π.

$$d(\sigma, \pi) = d(A, \pi) = \frac{|4 \cdot 0 - 10 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1|}{\sqrt{16 + 100 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{120}} = \frac{\sqrt{30}}{60}$$

131

Construye un triángulo equilátero de forma que dos de sus vértices sean $P(1, 2, 3)$ y $Q(-1, 4, 3)$ y el tercer vértice R esté en el plano $\pi: x + y + z = 2$. ¿Qué área tiene?

(Navarra. Junio 2003. Opción C. Pregunta 1)



- $R(a, b, c) \in \pi \to a + b + c = 2$
- $d(P, Q) = d(P, R) = d(Q, R)$

$$\sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{(a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2} = \sqrt{(a+1)^2 + (b-4)^2 + (c-3)^2}$$

$$\to \begin{cases} 8 = (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 \\ 8 = (a+1)^2 + (b-4)^2 + (c-3)^2 \end{cases}$$

Tenemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} a + b + c = 2 \\ (a-1)^2 + (b-2)^2 + (c-3)^2 = 8 \\ (a+1)^2 + (b-4)^2 + (c-3)^2 = 8 \end{array}\right\} \to \begin{cases} a_1 = -1,\ b_1 = 2,\ c_1 = 1 \\ a_2 = -\dfrac{5}{3},\ b_2 = \dfrac{4}{3},\ c_2 = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

Obtenemos dos soluciones: $R_1(-1, 2, 1)$ y $R_2\left(-\frac{5}{3}, \frac{4}{3}, \frac{7}{3}\right)$

Calculamos el área:

Base $= |\vec{PQ}| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Como los ángulos de un triángulo equilátero valen 60°:

Altura $= \sqrt{8} \cdot sen\ 60° = \sqrt{8} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}$

Área $= \dfrac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{2} = 2\sqrt{3}$

132 Sean las rectas:

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2} \qquad s: \left.\begin{array}{l} x-3y-5=0 \\ x-3z-8=0 \end{array}\right\}$$

a) Halla la ecuación del plano π que contiene a r y es paralelo a s.

b) Calcula la distancia entre el plano π y la recta s.

(Madrid. Septiembre 2007. Opción B. Ejercicio 3)

a) $s: \left.\begin{array}{l} x-3y-5=0 \\ x-3z-8=0 \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{l} x = 8+3\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}_s = (3, 1, 1) \qquad Q_s(8, 1, 0)$

$r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2} \rightarrow \vec{v}_r = (1, -1, 2) \qquad P_r(0, 1, 2)$

El plano π tiene como vectores directores $\vec{u}_s$ y $\vec{v}_r$ y pasa por el punto $P_r(0, 1, 2)$.

$$\left.\begin{array}{r} P_r(0, 1, 2) \\ \vec{v}_r = (1, -1, 2) \\ \vec{u}_s = (3, 1, 1) \end{array}\right\} \rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3x + 5y + 4z - 13 = 0$$

b) La distancia de la recta s al plano π es la distancia de un punto de la recta s al plano.

Tomamos $Q_s(8, 1, 0) \in s$.

$$d(s, \pi) = d(Q_s, \pi) = \frac{|-3 \cdot 8 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 0 - 13|}{\sqrt{9+25+16}} = \frac{32}{\sqrt{50}} = \frac{16\sqrt{2}}{5}$$

135 Se consideran los puntos $A(0, 1, 0)$ y $B(1, 0, 1)$. Se pide:

a) Escribe la ecuación que deben verificar los puntos $X(x, y, z)$ que equidistan de A y B.

b) Determina la ecuación que verifican los puntos $X(x, y, z)$ cuya distancia a A es igual a la distancia de A a B.

c) Escribe las ecuaciones paramétricas de la recta formada por los puntos $C(x, y, z)$ del plano $x + y + z = 3$ tales que el triángulo ABC es rectángulo con el ángulo recto en el vértice A.

(Madrid. Septiembre 2006. Opción A. Ejercicio 4)

a) $d(A, X) = d(B, X)$

$\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} = \sqrt{(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2} \rightarrow 2x - 2y + 2z - 1 = 0$

La ecuación que verifican los puntos X es un plano.

b) $d(A, X) = d(A, B)$

$\sqrt{x^2 + (y-1)^2 + z^2} = \sqrt{3} \rightarrow x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 3$

Se trata de la ecuación de la esfera de centro el punto $A(0, 1, 0)$ y radio $\sqrt{3}$.

c) $C \in \pi: x + y + z = 3 \rightarrow C(\lambda, \mu, 3 - \lambda - \mu)$

El triángulo ABC es rectángulo con ángulo recto en A:

$\vec{AB} = (1, -1, 1)$ y $\vec{AC} = (\lambda, \mu - 1, 3 - \lambda - \mu)$ son perpendiculares.

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \rightarrow \lambda - \mu + 1 + 3 - \lambda - \mu = 0 \rightarrow \mu = 2$

Por tanto, los puntos que buscamos son de la forma $C(\lambda, 2, 1 - \lambda)$. Es decir, pertenecen a la recta:

$$r: \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 2 \\ z = 1 - \lambda \end{array}\right\}$$

136 Demostrar que las rectas:

$$L_1: \left.\begin{array}{r} x = 1+t \\ y = 3+3t \\ z = 3+t \end{array}\right\} \qquad L_2: \left.\begin{array}{r} 3x - y + 4 = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{array}\right\}$$

son paralelas.

Encontrar la ecuación del plano paralelo al determinado por dichas rectas y que diste de él $\sqrt{6}$.

(Murcia. Septiembre 2005. Bloque 2. Cuestión 2)

$$L_1: \left.\begin{array}{r} x = 1+t \\ y = 3+3t \\ z = 3+t \end{array}\right\} \rightarrow \vec{u}_1 = (1, 3, 1) \qquad P_1(1, 3, 3)$$

$$L_2: \left.\begin{array}{r} 3x - y + 4 = 0 \\ x - z + 4 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow L_2: \left.\begin{array}{r} x = -4+\lambda \\ y = -8+3\lambda \\ z = \lambda \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_2 = (1, 3, 1) \qquad Q_2(-4, -8, 0)$$

Las dos rectas tienen el mismo vector director, por tanto, son paralelas.

El plano determinado por L_1 y L_2 tiene como vectores directores $\vec{u}_1$ y $\overrightarrow{P_1Q_2}$, y pasa por el punto $P_1(1, 3, 3)$.

$$\left.\begin{array}{r} P_1(1, 3, 3) \\ \vec{u}_1 = (1, 3, 1) \\ \overrightarrow{P_1Q_2} = (-5, -11, -3) \end{array}\right\}$$

$$\rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-3 & z-3 \\ 1 & 3 & 1 \\ -5 & -11 & -3 \end{vmatrix} = 2x - 2y + 4z - 8 = 0 \rightarrow \pi: x - y + 2z - 4 = 0$$

Un plano paralelo a π será de la forma $\pi': x - y + 2z + D = 0$. Así:

$$d(\pi, \pi') = d(P_1, \pi') = \frac{|1 - 3 + 6 + D|}{\sqrt{1+1+4}} = \frac{|4+D|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$$

$$|4 + D| = 6 \rightarrow \begin{cases} D = 6 - 4 = 2 \\ D = -6 - 4 = -10 \end{cases}$$

Los planos buscados son $\sigma_1: x - y + 2z + 2 = 0$ y $\sigma_2: x - y + 2z - 10 = 0$.

128 Halla la ecuación general del plano que corta a los ejes de coordenadas en los puntos (1, 0, 0), (0, 2, 0) y (0, 0, 3).

Halla los puntos de la recta $x = y = z$ que están a distancia $\frac{1}{7}$ de este plano.

(Baleares. Junio 2002. Opción B. Cuestión 4)

Si $A(1, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ y $C(0, 0, 3)$:

$$\left.\begin{array}{r} A(1, 0, 0) \\ \overrightarrow{AB} = (-1, 2, 0) \\ \overrightarrow{AC} = (-1, 0, 3) \end{array}\right\} \rightarrow \pi: \begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6x + 3y + 2z - 6 = 0$$

Un punto genérico de la recta $r: x = y = z$ es de la forma $P(\lambda, \lambda, \lambda)$.

$$d(P, \pi) = \frac{|6 \cdot \lambda + 3 \cdot \lambda + 2\lambda - 6|}{\sqrt{36 + 9 + 4}} = \frac{1}{7} \rightarrow |11\lambda - 6| = 1 \rightarrow \begin{cases} \lambda = \dfrac{1+6}{11} = \dfrac{7}{11} \\ \lambda = \dfrac{-1+6}{11} = \dfrac{5}{11} \end{cases}$$

Los puntos buscados son: $Q_1\left(\frac{7}{11}, \frac{7}{11}, \frac{7}{11}\right)$ y $Q_2\left(\frac{5}{11}, \frac{5}{11}, \frac{5}{11}\right)$.

126

Un helicóptero situado en el punto $P(1, 2, 1)$ quiere aterrizar en el plano $\pi: x+y+3z=0$.

a) Calcula la ecuación en forma continua de la recta de la trayectoria que le lleve al punto más cercano del plano π.

b) Calcula dicho punto.

c) Calcula la distancia que debe recorrer.

(Murcia. Junio 2007. Bloque 2. Cuestión A)

a) La trayectoria es la recta perpendicular al plano que pasa por P.

$$\left.\begin{array}{ll}\text{Punto:} & P(1,2,1)\\ \text{Vector director:} & \vec{n}_\pi = (1,1,3)\end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = 1+\lambda\\ y = 2+\lambda\\ z = 1+3\lambda\end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{r} x = 1+\lambda\\ y = 2+\lambda\\ z = 1+3\lambda\\ x+y+3z=0\end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{5}{11}\\ y = \dfrac{16}{11}\\ z = -\dfrac{7}{11}\\ \lambda = -\dfrac{6}{11}\end{cases} \rightarrow Q\left(\frac{5}{11}, \frac{16}{11}, -\frac{7}{11}\right)$$

c) $d(P,Q) = |\overrightarrow{PQ}| = \left|\left(-\dfrac{6}{11}, -\dfrac{6}{11}, -\dfrac{18}{11}\right)\right| = \dfrac{6\sqrt{11}}{11}$