Tema IV - Soluciones ejercicios

62

$$\sqrt[4]{\frac{-1+i}{1+i}} = \sqrt[4]{\frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}} = \sqrt[4]{\frac{2i}{2}} = \sqrt[4]{i} = 1_{\frac{90^\circ+k\cdot 360^\circ}{4}}$$

Si $k=0 \rightarrow x_1 = 2_{22,5^\circ}$ Si $k=2 \rightarrow x_3 = 2_{202,5^\circ}$

Si $k=1 \rightarrow x_2 = 2_{112,5^\circ}$ Si $k=3 \rightarrow x_4 = 2_{292,5^\circ}$

30

a) $x^2 - 2x + 5 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4\cdot 1\cdot 5}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 1+2i \\ x_2 = 1-2i \end{cases}$$

b) $x^2 - 6x + 10 = 0$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4\cdot 1\cdot 10}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3+i \\ x_2 = 3-i \end{cases}$$

33

a) $(1-3i)(2-6i) = 2 - 6i - 6i - 18 = -16 - 12i$

b) $(-3-4i)(7-i) = -21 + 3i - 28i - 4 = -25 - 25i$

34

a) $$\frac{-1+5i}{3-2i} = \frac{(-1+5i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)} = \frac{-3-2i+15i-10}{9+4} = \frac{-13+13i}{13} = -1+i$$

b) $$\frac{20+40i}{8+6i} = \frac{(20+40i)(8-6i)}{(8+6i)(8-6i)} = \frac{160-120i+320i+240}{64+36} = 4+2i$$

c) $$\frac{-1+5i}{2-i} = \frac{(-1+5i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{-2-i+10i-5}{4+1} = \frac{-7+9i}{5}$$

35

a) $$\frac{30(1-i)}{-4-2i} + (2-3i)i$$

b) $$2i - \frac{(2+3i)3}{-3+i}$$

68

$(a+bi)(c+di) = ac - bd + (ad+bc)i$

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i$$

a) Para que sea un número real: $ad = -bc$

b) Para que sea un número imaginario puro: $ac = bd$

c) Para que sea un número imaginario puro: $ac = -bd$

d) Para que sea un número real: $ad = bc$

70

Calculamos el cuadrado: $\left(a + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 = a^2 - \frac{3}{4} + \sqrt{3}ai$

Hallamos el conjugado: $a - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$$\begin{cases} a^2 - \frac{3}{4} = a \\ \sqrt{3}a = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

73	Para que esté sobre la bisectriz del primer cuadrante, la parte imaginaria debe ser igual a la parte real. $$\frac{12+ci}{-5+2i}=\frac{(12+ci)(-5-2i)}{(-5+2i)(-5-2i)}=\frac{-60+2c+(-24-5c)i}{29}$$ $$-60+2c=-24-5c\rightarrow c=\frac{36}{7}$$
74	No es cierto, ya que: $1_{180°}\cdot 1_{90°}=1_{270°}$. Solo es cierto si el número real es positivo. Si multiplicamos un número real positivo por un número complejo z, el resultado tiene el mismo argumento que z.
75	Sean $z_1=a+bi$ y $z_2=c+di$ dos números complejos. Calculamos el conjugado del producto: $(a+bi)(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i$ El conjugado del producto es: $ac-bd-(ad+bc)i$ Hallamos el producto de sus conjugados: $(a-bi)(c-di)=ac-bd+(-ad-bc)i=ac-bd-(ad+bc)i$ Luego es cierto.
91	a) $x^2-8ix+4i-19=0\rightarrow x=\frac{8i\pm\sqrt{-64-4\cdot1\cdot(4i-19)}}{2\cdot1}=\frac{8i\pm\sqrt{10-16i}}{2}$ b) $\left.\begin{matrix}x-iy=0\\ y-ix=4-6i\end{matrix}\right\}\xrightarrow{x=iy}y-i(iy)=4-6i\rightarrow y+y=4-6i\rightarrow y=2-3i$ $x=i(2-3i)=3+2i$