060 Determina una recta paralela al eje *Y* que pase por el punto (4, −2, 3).

Por ser paralelo al eje Y, un vector director de la recta es (0, 1, 0).

$$r:\left.\begin{array}{l} x = 4 \\ y = -2 + t \\ z = 3 \end{array}\right\}$$

061 ¿Pertenece el punto (−1, 2, 7) a la recta $r:\left.\begin{array}{l} x = -2 + \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 2 + 3\lambda \end{array}\right\}$? En caso negativo, obtén la ecuación en forma paramétrica de la recta paralela a *r* que pasa por dicho punto.

$-1 = -2 + \lambda \rightarrow \lambda = 1$
$2 = 3 - \lambda \rightarrow \lambda = 1$
$7 = 2 + 3\lambda \rightarrow \lambda \neq 1 \rightarrow$ El punto no pertenece a la recta.

$$r:\left.\begin{array}{l} x = -1 + \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = 7 + 3\lambda \end{array}\right\}$$

062 Expresa en forma continua la ecuación de la recta que pasa por el punto (−5, −4, 0) y es paralela a la recta *r*, cuyas ecuaciones paramétricas son:

$$r:\left.\begin{array}{l} x = 1 - 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -2 + \lambda \end{array}\right\}$$

a) ¿Está el punto (1, −13, −3) en dicha recta?

b) ¿Y (−3, −7, −2)?

$$r: \frac{x+5}{-2} = \frac{y+4}{3} = \frac{z}{1}$$

a) $\frac{1+5}{-2} = \frac{-13+4}{3} = \frac{-3}{1} \rightarrow$ El punto pertenece a la recta.

b) $\frac{-3+5}{-2} = \frac{-7+4}{3} \neq \frac{-2}{1} \rightarrow$ El punto no pertenece a la recta.

063 Dados los puntos $A(-3, 2, 9)$, $B(1, 0, -7)$ y $C(0, 4, -3)$:

a) Halla la ecuación de la recta que pasa por A y B.

b) ¿Están los tres puntos alineados?

a) $\overrightarrow{AB} = (4, -2, -16)$

$$r: \left.\begin{array}{l} x = 1 + 4t \\ y = -2t \\ z = -7 - 16t \end{array}\right\}$$

b) $$\left.\begin{array}{l} 0 = 1 + 4t \rightarrow t = -\dfrac{1}{4} \\ 4 = -2t \rightarrow t \neq -\dfrac{1}{4} \end{array}\right\} \rightarrow$$ C no pertenece a la recta que pasa por A y por B. Los puntos no están alineados.

065 Expresa en la forma indicada la ecuación de las rectas cuyas ecuaciones implícitas son:

a) $r: \left.\begin{array}{l} x - 3y + 4z = 2 \\ 3x - y + 2z = 4 \end{array}\right\}$ en forma paramétrica

b) $s: \left.\begin{array}{l} 2x + y - z = 1 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{array}\right\}$ en forma continua

a) $$x = 2 + 3y - 4z \rightarrow \left.\begin{array}{r} x - 3y + 4z = 2 \\ 8y - 10z = -2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{5}{4} - t \\ y = -\dfrac{1}{4} + 5t \\ z = 4t \end{array}\right\}$$

b) $$y = 1 - 2x + z \rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y - z = 1 \\ -5x + 5z = -3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{5} + t \\ y = -\dfrac{1}{5} - t \\ z = t \end{array}\right\} \rightarrow \frac{x - \frac{3}{5}}{1} = \frac{y + \frac{1}{5}}{-1} = \frac{z}{1}$$

068 Calcule la ecuación de la recta paralela a la recta $r: \left.\begin{array}{l} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \end{array}\right\}$ que pasa por el punto $(0, 1, 0)$.

(Cataluña. Septiembre 2006. Cuestión 3)

$$r: \left.\begin{array}{l} z = x + y \\ 3x = 1 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3} \\ y = -\dfrac{1}{3} + t \\ z = t \end{array}\right\}$$ La recta paralela es $s: \left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 1 + t \\ z = t \end{array}\right\}$

071 Sean A y B los puntos del espacio de coordenadas $A(0, 1, 2)$, $B(1, 2, 3)$.
Encontrar la ecuación paramétrica de la recta que pasa por dichos puntos.
¿Existen valores de r y s para los cuales el punto C de coordenadas $C(3, r + s, r - s)$ pertenezca a la recta calculada antes? En caso afirmativo calcular los valores de r y s. Razonar la contestación en caso negativo.

(País Vasco. Junio 2004. Bloque B. Cuestión B)

$$\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$$

$$m\colon \left.\begin{array}{r} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{r} 3 = t \\ r + s = 1 + t \\ r - s = 2 + t \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} r + s = 4 \\ r - s = 5 \end{array}\right\} \to \left\{\begin{array}{l} r = \dfrac{9}{2} \\ s = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

073 Prueba que las ecuaciones $\left.\begin{array}{r} x - y + z - 4 = 0 \\ 3x + 5z - 9 = 0 \end{array}\right\}$ y $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-3}$ representan la misma recta.

(La Rioja. Septiembre 2002. Propuesta A. Ejercicio 1)

$$r\colon \left.\begin{array}{r} x - y + z - 4 = 0 \\ 3x + 5z - 9 = 0 \end{array}\right\} \to r\colon \left.\begin{array}{l} x = 3 + 5t \\ y = -1 + 2t \\ z = -3t \end{array}\right\} \to r\colon \frac{x-3}{5} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-3}$$

Las dos rectas tienen la misma ecuación, representan la misma recta.

099 Estudia las posiciones relativas de las parejas de rectas siguientes.

a) $r\colon \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y+2}{3} = z - 3 \qquad s\colon x - 2 = \dfrac{y+4}{-1} = \dfrac{z-4}{-2}$

b) $r\colon \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = z + 4 \qquad s\colon \dfrac{x+1}{-4} = \dfrac{y-5}{2} = \dfrac{z+1}{-2}$

c) $r\colon \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z-1}{3} \qquad s\colon \left.\begin{array}{r} 3x + z = 10 \\ 5x - y - z = 16 \end{array}\right\}$

d) $r\colon \left.\begin{array}{r} 2x + z = 4 \\ x + 3y + z = 4 \end{array}\right\} \qquad s\colon \left.\begin{array}{r} x + y - z = 8 \\ 3x - y + 3z = 18 \end{array}\right\}$

e) $r\colon \left.\begin{array}{r} 2x + y - z = 1 \\ x + 2y + 2z = 0 \end{array}\right\} \qquad s\colon \left.\begin{array}{r} -x + y + 2z = -2 \\ 3x - y + 3z = 11 \end{array}\right\}$

f) $r\colon \left.\begin{array}{r} 2x + 4y - z = 7 \\ -x + y + 2z = -2 \end{array}\right\} \qquad s\colon \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$

a) $r\colon \left\{\begin{array}{l} P(2, -2, 3) \\ \vec{u} = (-1, 3, 1) \end{array}\right. \qquad s\colon \left\{\begin{array}{l} Q(2, -4, 4) \\ \vec{v} = (1, -1, -2) \end{array}\right. \qquad \overrightarrow{PQ} = (0, -2, 1)$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Las rectas son secantes.

b) $r: \begin{cases} P(3, 2, -4) \\ \vec{u} = (2, -1, 1) \end{cases}$ $\qquad s: \begin{cases} Q(-1, 5, -1) \\ \vec{v} = (-4, 2, -2) \end{cases}$ $\qquad \overrightarrow{PQ} = (-4, 3, 3)$

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 2$$

Las rectas son paralelas.

c) $r: \begin{cases} P(3, -2, 1) \\ \vec{u} = (-1, 2, 3) \end{cases}$ $\qquad s: \left.\begin{matrix} 3x + z = 10 \\ 5x - y - z = 16 \end{matrix}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{matrix} x = t \\ y = -26 + 8t \\ z = 10 - 3t \end{matrix}\right\}$

$s: \begin{cases} Q(0, -26, 10) \\ \vec{v} = (1, 8, -3) \end{cases}$ $\qquad \overrightarrow{PQ} = (-3, -24, 9)$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & -3 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & -3 \\ -3 & -24 & 9 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 8 & -3 \\ -3 & -24 & 9 \end{pmatrix} = 2$$

Las rectas son secantes.

d) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -10 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 3$

$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 8 \\ 3 & -1 & 3 & 18 \end{vmatrix} = -180 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & 8 \\ 3 & -1 & 3 & 18 \end{pmatrix} = 4$

Las rectas se cruzan.

e) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix} = 3$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 3 & -1 & 3 & 11 \end{pmatrix} = 3$

Las rectas son secantes.

f) $r\colon \left.\begin{aligned} 2x + 4y - z = 7 \\ 6y + 3z = 3 \end{aligned}\right\} \rightarrow r\colon \left.\begin{aligned} x &= 4 - 3t \\ y &= t \\ z &= 1 - 2t \end{aligned}\right\}$

$r\colon \begin{cases} P(4, 0, 1) \\ \vec{u} = (-3, 1, -2) \end{cases}$ $\quad s\colon \begin{cases} Q(1, 1, -1) \\ \vec{v} = (3, -1, 2) \end{cases}$ $\quad \overrightarrow{PQ} = (-3, 1, -2)$

$\text{Rango}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 1$

$\text{Rango}\begin{pmatrix} -3 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 1$

Las rectas son coincidentes.

100 Decide si las dos rectas se cortan, y en caso de que sea así, calcula el plano que las contiene.

$$r: \frac{x+3}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1} \qquad s: \left.\begin{aligned} x &= 3-2\lambda \\ y &= 1+\lambda \\ z &= -\lambda \end{aligned}\right\}$$

$$r: \begin{cases} P(-3, 1, -1) \\ \vec{u} = (2, 2, -1) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} Q(3, 1, 0) \\ \vec{v} = (-2, 1, -1) \end{cases} \qquad \overrightarrow{PQ} = (6, 0, 1)$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Las rectas son secantes.

El plano que las contiene es:

$$\pi: \begin{vmatrix} x+3 & y-1 & z+1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -x + 4y + 6z - 1 = 0 \rightarrow \pi: x - 4y - 6z + 1 = 0$$

102 Decide si estas dos rectas se cortan y, en caso afirmativo, determina el punto de corte.

$$r: \left.\begin{aligned} x &= -4+7\lambda \\ y &= 2\lambda \\ z &= -1 \end{aligned}\right\} \qquad s: \left.\begin{aligned} x &= 1-\lambda \\ y &= 10+4\lambda \\ z &= 3+2\lambda \end{aligned}\right\}$$

$$r: \begin{cases} P(-4, 0, -1) \\ \vec{u} = (7, 2, 0) \end{cases} \qquad s: \begin{cases} Q(1, 10, 3) \\ \vec{v} = (-1, 4, 2) \end{cases} \qquad \overrightarrow{PQ} = (5, 10, 4)$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 30 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \\ 5 & 10 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

Las rectas son secantes.

$$\left.\begin{aligned} -4+7\lambda &= 1-t \\ 2\lambda &= 10+4t \\ -1 &= 3+2t \end{aligned}\right\} \rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ t = -2 \end{cases} \rightarrow P(3, 2, -1) \text{ es el punto de corte.}$$

069 Considere el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} px+7y+8z=1.370 \\ x+y+z=200 \\ 7x+py+8z=1.395 \end{array}\right\}$$

a) Discútalo en función del parámetro p.

b) Resuelva el sistema para $p=6$.

(Cataluña. Septiembre 2006. Problema 6)

a) $A=\begin{pmatrix} p & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & p & 8 \end{pmatrix}$ $\qquad A^*=\left(\begin{array}{ccc|c} p & 7 & 8 & 1.370 \\ 1 & 1 & 1 & 200 \\ 7 & p & 8 & 1.395 \end{array}\right)$

$$|A|=\begin{vmatrix} p & 7 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & p & 8 \end{vmatrix}=-p^2+16p-63 \qquad \begin{vmatrix} p & 8 & 1.370 \\ 1 & 1 & 200 \\ 7 & 8 & 1.395 \end{vmatrix}=-205p+1.410$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$$

$$-p^2+16p-63=0\rightarrow\begin{cases} p=7 \\ p=9 \end{cases}$$

- Si $p\in\mathbb{R}-\{7,9\}\rightarrow$ Rango $(A)=$ Rango $(A^*)=3$
  Sistema compatible determinado
- Si $p=7$ o $p=9\rightarrow$ Rango $(A)=2\neq$ Rango $(A^*)=3\rightarrow$ Sistema incompatible

b) Para $p=6\rightarrow|A|=-3$

$$|A_x|=\begin{vmatrix} 1.370 & 7 & 8 \\ 200 & 1 & 1 \\ 1.395 & 6 & 8 \end{vmatrix}=-255\rightarrow x=\frac{|A_x|}{|A|}=85$$

$$|A_y|=\begin{vmatrix} 6 & 1.370 & 8 \\ 1 & 200 & 1 \\ 7 & 1.395 & 8 \end{vmatrix}=-180\rightarrow y=\frac{|A_y|}{|A|}=60$$

$$|A_z|=\begin{vmatrix} 6 & 7 & 1.370 \\ 1 & 1 & 200 \\ 7 & 6 & 1.395 \end{vmatrix}=-165\rightarrow z=\frac{|A_z|}{|A|}=55$$

110 Estudia, según los valores del parámetro k, la posición relativa de las rectas siguientes:

$$x-k=\frac{y+1}{2k-1}=\frac{z}{2} \qquad \frac{x}{k+1}=\frac{y-2}{-1}=z+2$$

(Baleares. Septiembre 2006. Opción A. Cuestión 2)

$$r:\begin{cases} P(k,-1,0) \\ \vec{u}=(1,2k-1,2)\end{cases} \qquad s:\begin{cases} Q(0,2,-2) \\ \vec{v}=(k+1,-1,1)\end{cases} \qquad \overrightarrow{PQ}=(-k,3,-2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2k-1 \\ k+1 & -1 \end{vmatrix} = -k(2k+1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ k+1 & 1 \end{vmatrix} = -2k-1$$

$$\begin{vmatrix} 2k-1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2k+1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2k-1 & 2 \\ k+1 & -1 & 1 \\ -k & 3 & -2 \end{vmatrix} = 2k^2+7k+3 \qquad \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -1$$

$$2k^2+7k+3=0 \rightarrow \begin{cases} k=-3 \\ k=-\dfrac{1}{2}\end{cases}$$

- Si $k \in \mathbb{R}-\left\{-3,-\dfrac{1}{2}\right\}$: el rango de la matriz formada por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{PQ}$ es 3 y el de la matriz determinada por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es 2, por tanto, las rectas se cruzan.
- Si $k=-3$: los rangos de ambas matrices valen 2, luego las rectas son secantes.
- Si $k=-\dfrac{1}{2}$: el rango de la matriz formadapor $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\overrightarrow{PQ}$ es 2 y el de la matriz determinada por $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es 1, por lo que las rectas son paralelas.

120 Consideramos las rectas:

$$r_1:\left.\begin{matrix} x+y=5 \\ y+z=2 \end{matrix}\right\} \qquad r_2:\left.\begin{matrix} y=1 \\ x+y+z=6 \end{matrix}\right\} \qquad r_3:\left.\begin{matrix} x-y=1 \\ y-z=3 \end{matrix}\right\}$$

Se pide:

a) Demuestra que las rectas r_1 y r_2 se cortan en un único punto.

b) Halla las ecuaciones en forma continua de la recta que pasa por el punto de intersección de r_1 y r_2 y es paralela a r_3.

(Castilla-La Mancha. Junio 2007. Bloque 4. Pregunta A)

a) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{pmatrix} = 3$$

Las rectas r_1 y r_2 se cortan en un punto.

b) $\left.\begin{aligned} x+y&=5\\ y+z&=2\\ y&=1\\ x+y+z&=6\end{aligned}\right\} \to P(4,\ 1,\ 1)$ es el punto de intersección de r_1 y r_2.

r_3: $\left.\begin{aligned} x&=4+t\\ y&=3+t\\ z&=t\end{aligned}\right\}$ La recta es s: $\dfrac{x-4}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-1}{1}$

106 Determina la posición relativa de las siguientes rectas:

$$r_1\colon \left.\begin{aligned} 7x+5y-7z-12&=0\\ 2x+3z+11&=0\end{aligned}\right\} \qquad r_2\colon \left.\begin{aligned} 5x-5y-z-16&=0\\ 3x-2y-7&=0\end{aligned}\right\}$$

(Aragón. Junio 2007. Opción B. Cuestión 4)

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & -7\\ 2 & 0 & 3\\ 5 & -5 & -1\end{vmatrix} = 260 \neq 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} 7 & 5 & -7\\ 2 & 0 & 3\\ 5 & -5 & -1\\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 5 & -7 & -12\\ 2 & 0 & 3 & 11\\ 5 & -5 & -1 & -16\\ 3 & -2 & 0 & -7\end{vmatrix} = -552 \neq 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} 7 & 5 & -7 & -12\\ 2 & 0 & 3 & 11\\ 5 & -5 & -1 & -16\\ 3 & -2 & 0 & -7\end{pmatrix} = 4$$

Las rectas se cruzan.

109 Sean r y s las rectas dadas por:

$$r\colon \left.\begin{aligned} 2x-y&=m\\ z+2y&=3\end{aligned}\right\} \qquad s\colon \left.\begin{aligned} x+y&=2\\ x+2z&=3\end{aligned}\right\}$$

a) Halla m para que ambas rectas se corten.

b) Para $m=1$, halla la ecuación del plano que contiene a r y a s.

(Castilla y León. Junio 2006. Prueba A. Problema 1)

a) El rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada tiene que ser 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix} = -3 \neq 0 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix} = 3$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & m\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 2 & 3\end{vmatrix} = 5m-5 \to \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & m\\ 0 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 1 & 0 & 2\\ 1 & 0 & 2 & 3\end{pmatrix} = 3 \to m=1$$

b) $r: \left.\begin{array}{r} 2x - y = 1 \\ z + 2y = 3 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 5 - 4t \end{array}\right\}$

$s: \left.\begin{array}{r} x + y = 2 \\ x + 2z = 3 \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{l} x = 3 - 2t \\ y = -1 + 2t \\ z = t \end{array}\right\}$

El plano que buscamos pasa por el punto $A(0, -1, 5) \in r$ y tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas r y s.

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y+1 & z-5 \\ 1 & 2 & -4 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: 10x + 7y + 6z - 23 = 0$$

083 Escribe las ecuaciones paramétricas de los planos cartesianos (los planos que contienen a dos de los ejes cartesianos).

Ecuaciones paramétricas del plano OXY: $\left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = 0 \end{array}\right\}$

Ecuaciones paramétricas del plano OXZ: $\left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = \mu \end{array}\right\}$

Ecuaciones paramétricas del plano OYZ: $\left.\begin{array}{l} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = \mu \end{array}\right\}$

088 Considera los puntos del espacio:

$A(0, 0, 1) \qquad B(1, 1, 2) \qquad C(0, -1, -1)$

a) Encuentra la ecuación del plano ABC.

b) Si D es el punto de coordenadas $(k, 0, 0)$, ¿cuánto ha de valer k para que los cuatro puntos A, B, C y D sean coplanarios?

(Cataluña. Junio 2004. Cuestión 2)

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1) \qquad \overrightarrow{AC} = (0, -1, -2)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -x + 2y - z + 1 = 0 \rightarrow \pi: x - 2y + z - 1 = 0$$

b) Si D pertenece al mismo plano entonces:

$k - 2 \cdot 0 + 0 - 1 = 0 \rightarrow k = 1$

098 Dados el punto $A(3, 5, -1)$ y la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = y+2 = \dfrac{z+1}{4}$ hállese el punto B perteneciente a r tal que el vector de extremos A y B es paralelo al plano π de ecuación $3x - 2y + z + 5 = 0$.

(Castilla y León. Junio 2005. Opción B. Cuestión 2)

El punto B es de la forma $(1+2t, -2+t, -1+4t)$.

$\overrightarrow{AB} = (-2+2t, -7+t, 4t)$

$$\pi: 3x - 2y + z + 5 = 0 \rightarrow \pi: \left.\begin{array}{l} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -5 - 3\lambda + 2\mu \end{array}\right\}$$

Si el vector de extremos A y B es paralelo a π entonces los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u} = (1, 0, -3)$ y $\vec{v} = (0, 1, 2)$ son linealmente dependientes.

$$\begin{vmatrix} -2+2t & -7+t & 4t \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 8t + 8 = 0 \rightarrow t = -1$$

Sustituyendo $t = -1$ en la expresión de B obtenemos $B(-1, -3, -5)$.

086 Obtén las ecuaciones del plano paralelo al plano $2x - 2y + 3z - 12 = 0$ que pasa por el punto $(-2, 3, -1)$.

$$\pi: 2x - 2y + 3z - 12 = 0 \rightarrow \pi: \left.\begin{array}{l} x = 6 + \lambda - 3\mu \\ y = \lambda \\ z = 2\mu \end{array}\right\}$$

Los vectores $\vec{u} = (1, 1, 0)$ y $\vec{v} = (-3, 0, 2)$ son también vectores directores del plano que buscamos.

$$\pi': \begin{vmatrix} x+2 & y-3 & z+1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2x - 2y + 3z + 13 = 0 \rightarrow \pi': 2x - 2y + 3z + 13 = 0$$

087 Calcula la ecuación del plano que contiene a la recta $r: \dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z+3}{-1}$ y es paralelo a la recta $s: \left.\begin{array}{r} x + 2y - z + 4 = 0 \\ 2x - 3y + 2z + 4 = 0 \end{array}\right\}$.

$$s: \left.\begin{array}{r} x + 2y - z + 4 = 0 \\ 2x - 3y + 2z + 4 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{l} x = -3 - t \\ y = 4t \\ z = 1 + 7t \end{array}\right\} \rightarrow \vec{v}_s = (-1, 4, 7)$$

El punto que buscamos pasa por el punto $P(-1, -1, -3) \in r$, y tiene por vectores directores $\vec{v}_r = (-2, 2, -1)$ y $\vec{v}_s = (-1, 4, -7)$.

$$\pi: \begin{vmatrix} x+1 & y+1 & z+3 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & 4 & 7 \end{vmatrix} = 18x + 15y - 6z + 15 = 0 \rightarrow \pi: 6x + 5y - 2z + 5 = 0$$

093 Dadas las rectas: $r: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{-1}$ $\qquad s: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+7}{2} = \dfrac{z+5}{3}$

y el punto $P(1, 1, -1)$, queremos encontrar la ecuación de la recta que pasa por P y que corta a r y a s. Para conseguirlo:

a) Encuentra la ecuación general o cartesiana (es decir, la ecuación de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del plano π que contiene a la recta r y al punto P.

b) Encuentra el punto M calculando el punto de intersección del plano π con la recta s.

c) Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y M.

d) Comprueba que la recta encontrada en el apartado anterior es la que buscamos.

(Cataluña. Junio 2008. Problema 6)

a) $Q(2, -1, 0) \in r$ $\qquad \overrightarrow{PQ} = (1, -2, 1)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z+1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2y + 4z + 2 = 0 \rightarrow \pi: y + 2z + 1 = 0$$

b) $$s: \left.\begin{array}{l} x = 1 + t \\ y = -7 + 2t \\ z = -5 + 3t \end{array}\right\}$$

$$\pi: y + 2z + 1 = 0 \rightarrow -7 + 2t - 10 + 6t + 1 = 0 \rightarrow t = 2 \rightarrow M(3, -3, 1)$$

c) $\overrightarrow{PM} = (2, -4, 2)$ $\qquad m: \left.\begin{array}{l} x = 1 + 2t \\ y = 1 - 4t \\ z = -1 + 2t \end{array}\right\}$

d) La recta m pasa por P, para $t = 0$, y por el punto M, punto de intersección de r y s, para $t = 1$.

070 Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(-2, -1, -4)$ y se apoya en las siguientes rectas:

$$r: \left.\begin{array}{l} x = 4 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2 + t \end{array}\right\} \qquad s: \left.\begin{array}{r} 2x - y + z + 4 = 0 \\ x + 3y - 2z - 3 = 0 \end{array}\right\}$$

Calculamos la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta r:

$Q(4, 1, 2) \in r$ $\qquad \overrightarrow{PQ} = (6, 2, 6)$ $\qquad \vec{v}_r = (1, 1, 1)$

$$\pi: \begin{vmatrix} x+2 & y+1 & z+4 \\ 6 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4x + 4z + 8 = 0 \rightarrow \pi: x - z - 2 = 0$$

Calculamos la ecuación del plano que contiene al punto P y a la recta s:

$$s: \left.\begin{array}{r} 2x - y + z + 4 = 0 \\ -7y + 5z + 10 = 0 \end{array}\right\} \rightarrow s: \left.\begin{array}{l} x = -1 - t \\ y = 5t \\ z = -2 + 7t \end{array}\right\} \begin{array}{l} R(-1, 0, -2) \in s \qquad \overrightarrow{PR} = (1, 1, 2) \\ \vec{v}_s = (-1, 5, 7) \end{array}$$

$$\sigma: \begin{vmatrix} x+2 & y+1 & z+4 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -3x - 9y + 6z + 9 = 0 \rightarrow \sigma: x + 3y - 2z - 3 = 0$$

La recta buscada es $m: \left.\begin{matrix} x - z - 2 = 0 \\ x + 3y - 2z - 3 = 0 \end{matrix}\right\}$

098 Dados el punto $A(3, 5, -1)$ y la recta $r: \dfrac{x-1}{2} = y + 2 = \dfrac{z+1}{4}$
hállese el punto B perteneciente a r tal que el vector de extremos A y B es paralelo al plano π de ecuación $3x - 2y + z + 5 = 0$.

(Castilla y León. Junio 2005. Opción B. Cuestión 2)

El punto B es de la forma $(1 + 2t, -2 + t, -1 + 4t)$.

$\overrightarrow{AB} = (-2 + 2t, -7 + t, 4t)$

$$\pi: 3x - 2y + z + 5 = 0 \rightarrow \pi: \left.\begin{matrix} x = \lambda \\ y = \mu \\ z = -5 - 3\lambda + 2\mu \end{matrix}\right\}$$

Si el vector de extremos A y B es paralelo a π entonces los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u} = (1, 0, -3)$ y $\vec{v} = (0, 1, 2)$ son linealmente dependientes.

$$\begin{vmatrix} -2+2t & -7+t & 4t \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 8t + 8 = 0 \rightarrow t = -1$$

Sustituyendo $t = -1$ en la expresión de B obtenemos $B(-1, -3, -5)$.

125 Halla la ecuación del plano π que pasa por el punto $P(3, -1, 4)$
y es paralelo a las rectas:

$$r_1: \left.\begin{matrix} 5x - y + 3z - 4 = 0 \\ 2x - y + z - 1 = 0 \end{matrix}\right\} \qquad r_2: \frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-3}$$

(Navarra. Junio 2008. Grupo 1. Opción A)

$$r_1: \left.\begin{matrix} 5x - y + 3z - 4 = 0 \\ 3x + 2z - 3 = 0 \end{matrix}\right\} \rightarrow r_1: \left.\begin{matrix} x = 1 - 2t \\ y = 1 - t \\ z = 3t \end{matrix}\right\}$$

El plano que buscamos pasa por $(3, -1, 4)$ y tiene como vectores directores los vectores directores de r_1 y r_2.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-3 & y+1 & z-4 \\ -2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -3x - 3y - 3z + 18 = 0 \rightarrow \pi: x + y + z - 6 = 0$$

103 Decide las posiciones relativas de las siguientes parejas formadas por un plano y una recta.

a) $r: \left.\begin{array}{l} x = 3 - \lambda \\ y = 2 \\ z = -1 + 3\lambda \end{array}\right\}$ $\qquad \pi: 2x - 3y + z - 2 = 0$

b) $r: \left.\begin{array}{r} 2x + y - 3z + 3 = 0 \\ 5x + 5y - 7z + 1 = 0 \end{array}\right\}$ $\qquad \pi: x + 3y - z - 5 = 0$

c) $r: \left.\begin{array}{r} -4x + y - 2z + 3 = 0 \\ 2x + 4y + z + 4 = 0 \end{array}\right\}$ $\qquad \pi: \left.\begin{array}{l} x = -1 - \lambda + \mu \\ y = 2 + 2\lambda - \mu \\ z = 3 - \mu \end{array}\right\}$

a) $r: \left.\begin{array}{c} \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{z+1}{3} \\ y = 2 \end{array}\right\} \to r: \left.\begin{array}{r} 3x - 9 = -z - 1 \\ y = 2 \end{array}\right\} \to r: \left.\begin{array}{r} 3x + z - 8 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{array}\right\}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \to \text{Rango} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

$$\text{Rango} \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 3$$

La recta y el plano se cortan en un punto.

b) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 5 \neq 0 \to \text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 5 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 5 & 1 \\ 1 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 0 \to \text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 3 \\ 5 & 5 & -7 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -5 \end{pmatrix} = 2$$

La recta está contenida en el plano.

c) $\pi: \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -2x - y - z + 3 = 0 \to \pi: 2x + y + z - 3 = 0$

$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0$ $\qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \to \text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} = 2$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 60 \neq 0 \to \text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -3 \\ -4 & 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix} = 3$$

La recta y el plano son paralelos.

119 Sean los planos:

$$\pi_1: 2x + 3y + z = 2$$
$$\pi_2: x + y - z = 1$$

a) Determina la posición relativa de los mismos.

b) Calcula una recta que esté contenida en el plano $\pi_2: x + y - z = 1$, sea paralela a la intersección de esos dos planos y que pase por el punto $(5, -3, 1)$.

(Asturias. Junio 2003. Bloque 5)

a) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2$

$\text{Rango}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 2$

Los planos son secantes.

b) $r: \left.\begin{array}{r} 2x + 3y + z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{r} 2x + 3y + z = 2 \\ 3x + 4y = 3 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = 1 - 4t \\ y = 3t \\ z = -t \end{array}\right\}$

El punto $(5, -3, 1)$ pertenece a esta recta $(t = -1)$, por tanto, dicha recta es la que cumple las condiciones del ejercicio.

121 Estudie si existe algún punto que pertenezca a la vez a los tres planos siguientes. Calcule los puntos en común (si existen).

$$\pi_1: x - y + z = 0 \qquad \pi_2: z = 2y \qquad \pi_3: \left.\begin{array}{l} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + \lambda + \mu \\ z = 1 + 2\lambda - \mu \end{array}\right\}$$

(Murcia. Septiembre 2007. Bloque 2. Cuestión B)

$$\pi_3: \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3x + y + z + 1 = 0 \rightarrow \pi_3: 3x - y - z - 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \rightarrow \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Rango}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 3$$

Los tres planos se cortan en un punto.

123 Determina a y b para que los planos:

$$x+y+z=2 \qquad 2x+3y+z=3 \qquad ax+10y+4z=b$$

se corten en una recta r. Da algún tipo de ecuaciones para r (las que quieras).

(La Rioja. Septiembre 2007. Propuesta B. Ejercicio 5)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Los planos se cortan en una recta si el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada es 2. Entonces:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ a & 10 & 4 \end{vmatrix} = 14 - 2a = 0 \rightarrow a = 7$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 7 & 10 & b \end{vmatrix} = b - 11 = 0 \rightarrow b = 11$$

$$r: \left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ 2x+3y+z=3 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x=1-2t \\ y=t \\ z=1+t \end{array}\right\} \rightarrow r: \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$$

124 En el espacio se consideran los tres planos de ecuaciones:

$$\pi_1: x+2y+z=1 \qquad \pi_2: px+y+pz=1 \qquad \pi_3: px+y+2z=1$$

donde p es un parámetro real.

a) Averigüe para qué valores de p los tres planos se cortan en un único punto. Halle este punto cuando $p = 1$.

b) ¿Hay algún valor de p que hace que la intersección común sea una recta? Si es así, escriba la ecuación vectorial de esta recta.

c) Encuentre cuál es la posición relativa de los tres planos cuando $p = \frac{1}{2}$.

(Cataluña. Junio 2007. Problema 6)

a) Los planos se cortan en un punto si el rango de la matriz de coeficientes y de la ampliada es 3.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ p & 1 & p \\ p & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2p^2 - 5p + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} p = \frac{1}{2} \\ p = 2 \end{cases}$$

- Si $p \in \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$: el sistema es compatible determinado, es decir, los tres planos se cortan en un único punto.
- Si $p = 1$:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ x+y+z=1 \\ x+y+2z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ y=0 \\ y-z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

El punto de intersección es $P(1, 0, 0)$.

b) Si $p = 2$:

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + 2z = 1 \\ 2x + y + 2z = 1 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$$

Como la segunda y la tercera ecuación son iguales, el rango de ambas matrices es 2.

Un plano corta a dos planos coincidentes en una recta.

$$r: \left.\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ 2x+y+2z=1 \end{array}\right\} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} x = \dfrac{1}{3} - t \\ y = \dfrac{1}{3} \\ z = t \end{array}\right\} \rightarrow r: (x, y, z) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right) + t(-1, 0, 1)$$

c) Si $p = \dfrac{1}{2}$:

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y + z = 1 \\ \dfrac{1}{2}x + y + \dfrac{1}{2}z = 1 \\ \dfrac{1}{2}x + y + 2z = 1 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{3}{2} \neq 0 \rightarrow \text{El rango de la matriz de coeficientes es 2.}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} \neq 0 \rightarrow \text{El rango de la matriz ampliada es 3.}$$

Como los dos primeros planos son paralelos, el tercero los corta en dos rectas paralelas.

129 Considera las rectas:

$$r: x - 3 = y - 4 = \frac{z-5}{2} \qquad\qquad s: \frac{x-5}{-2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-m}{2}$$

donde $m \in \mathbb{R}$.

a) Estudia, según los valores del parámetro m, las posiciones relativas de las dos rectas. En caso de que se corten las rectas r y s, calcula el punto de corte.

b) Cuando sean coplanarias, determina la ecuación general del plano que las contiene.

c) Estudia la posición relativa del plano del apartado anterior con el plano que pasa por los tres puntos: $A(3, 4, 5)$, $B(5, 4, -3)$ y $C(1, 2, 1)$.

Indicación: No es necesario construir el plano que pasa por esos tres puntos.

(Cantabria. Septiembre 2006. Bloque 3. Opción B)

a) $r: \begin{cases} P(3, 4, 5) \\ \vec{u} = (1, 1, 2) \end{cases}$ $\quad s: \begin{cases} Q(5, 4, m) \\ \vec{v} = (-2, -1, 2) \end{cases}$

$\overrightarrow{PQ} = (2, 0, m - 5)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & m-5 \end{vmatrix} = m + 3$$

- Si $m + 3 \neq 0 \rightarrow m \neq -3$:

  El rango de la matriz de coeficientes es 2 y el de la ampliada 3, las rectas se cruzan.

- Si $m + 3 = 0 \rightarrow m = -3$:

  El rango de las dos matrices es 2, las rectas son secantes.

Calculamos en este caso la intersección entre las dos rectas. Para ello igualaremos las ecuaciones paramétricas de ambas rectas.

$$\left.\begin{array}{r} 3 + \lambda = 5 - 2t \\ 4 + \lambda = 4 - t \\ 5 + 2\lambda = -3 + 2t \end{array}\right\} \rightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ t = 2 \end{cases} \rightarrow C(1, 2, 1) \text{ es el punto de corte.}$$

b) Las rectas son coplanarias si son secantes, es decir, si $m = -3$.

El plano que buscamos pasa por $P(3, 4, 5) \in r$ y tiene como vectores directores los vectores directores de r y s.

$$\pi: \begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-5 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi: 4x - 6y + z + 7 = 0$$

c) $A(3, 4, 5) \in r$

$B(5, 4, -3) \in r$

$C(1, 2, 1) \qquad 1 - 3 = 2 - 4 = 1 - 5 \rightarrow C \in r$

Los puntos A, B y C pertenecen a las rectas r y s por lo que también están en el plano. El plano que pasa por estos tres puntos es coincidente con el anterior.

116 Sea π el plano de ecuación $2x + 3y + 4z = a$ y r la recta que contiene al punto $P(1, 1, -1)$ y tiene como vector de dirección a $\vec{v} = (1, 2, -2)$.
¿Existe algún valor de a para el cual la recta esté contenida en el plano? Razonar la contestación en caso negativo. En caso afirmativo encontrar el valor de a.

(País Vasco. Julio 2006. Bloque B. Cuestión B)

$$r: \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-2} \rightarrow r: \left.\begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ 2x + z = 1 \end{array}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \qquad \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \rightarrow \text{Rango} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 2$$

La recta está contenida en el plano si la matriz ampliada tiene rango 2.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & a \end{vmatrix} = 2a - 2 = 0 \rightarrow a = 1$$