1.- Halla el cociente y el resto de cada división:

a) $\left(-2x^4+3x^3-2x+3\right):\left(x^2-2x+2\right)$

b) $\left(-x^4+2x^2-x+2\right):\left(x+2\right)$

c) $\left(2x^4-7x^3+3x^2-1\right):\left(x^2+2\right)$

d) $\left(-3x^4+6x^2+x-2\right):\left(x-1\right)$

e) $\left(2x^5-3x^4+2x^2-x+1\right):\left(x^3-2x+1\right)$

f) $\left(2x^5-3x^3+2x-1\right):\left(x+2\right)$

Solución:

a)

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
-2x^4 & +3x^3 & & -2x & +3 & x^2-2x+2 \\
\cline{6-6}
2x^4 & -4x^3 & +4x^2 & & & -2x^2-x+2 \\
\cline{1-5}
 & -x^3 & +4x^2 & -2x & +3 & \\
 & x^3 & -2x^2 & +2x & & \\
\cline{2-5}
 & & 2x^2 & & +3 & \\
 & & -2x^2 & +4x & -4 & \\
\cline{3-5}
 & & & 4x & -1 &
\end{array}
$$

Cociente $= -2x^2-x+2$

Resto $= 4x-1$

b) Aplicamos la regla de Ruffini:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & -1 & 0 & 2 & -1 & 2 \\
-2 & & 2 & -4 & 4 & -6 \\
\hline
 & -1 & 2 & -2 & 3 & \boxed{-4}
\end{array}
$$

Cociente $= -x^3+2x^2-2x+3$

Resto $= -4$

c)
$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & +7x^3 & +3x^2 & & -1 & x^2+2 \\
\cline{6-6}
-2x^4 & & -4x^2 & & & 2x^2-7x-1 \\
\cline{1-5}
 & -7x^3 & -x^2 & & -1 & \\
 & 7x^3 & & +14x & & \\
\cline{2-5}
 & & -x^2 & +14x & -1 & \\
 & & x^2 & & +2 & \\
\cline{3-5}
 & & & 14x & +1 &
\end{array}
$$

Cociente $= 2x^2 - 7x - 1$
Resto $= 14x + 1$

d) Aplicamos la regla de Ruffini:

	–3	0	6	1	–2
1		–3	–3	3	4
	–3	–3	3	4	2

Cociente $= -3x^3 - 3x^2 + 3x + 4$

Resto $= 2$

e)
$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
2x^5 & -3x^4 & & +2x^2 & -x & +1 & x^3+2x+1 \\
\cline{7-7}
-2x^5 & & +4x^3 & -2x^2 & & & x^2-3x+4 \\
\cline{1-6}
 & -3x^4 & +4x^3 & & -x & +1 & \\
 & x^4 & & -6x^2 & +3x & & \\
\cline{2-6}
 & & x^3 & -6x^2 & +2x & +1 & \\
 & & -4x^3 & & +8x & -4 & \\
\cline{3-6}
 & & & -6x^2 & +10x & -3 &
\end{array}
$$

Cociente $= 2x^2 - 3x + 4$
Resto $= -6x^2 + 10x - 3$

f) Aplicamos la regla de Ruffini:

	2	0	–3	0	2	–1
–2		–4	8	–10	20	–44
	2	–4	5	–10	22	–45

Cociente $= 2x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 10x + 22$
Resto $= -45$

2.- Factoriza estos polinomios:

a) $x^4 - 2x^3 + x^2$

b) $x^3 - 4x^2 + x + 6$

c) $x^5 + x^4 - 2x^3$

d) $x^3 - 3x + 2$

Solución:

a) Sacamos factor común y utilizamos que $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$:

$x^4 - 2x^3 + x^2 = x^2\,(x^2 - 2x + 1) = x^2\,(x-1)^2$

b) Utilizamos la regla de Ruffini:

	1	–4	1	6
2		2	–4	–6
	1	–2	–3	0
3		3	3	
	1	1	0	

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x-2)\,(x-3)\,(x+1)$

c) Sacamos factor común y hallamos las otras raíces resolviendo la ecuación:

$x^5 + x^4 - 2x^3 = x^3\,(x^2 + x - 2)$

$$x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

Por tanto: $x^5 + x^4 - 2x^3 = x^3\,(x-1)\,(x+1)$

d) Utilizamos la regla de Ruffini:

	1	0	–3	2
1		1	1	–2
	1	1	–2	0
1		1	2	
	1	2	0	

$x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2\,(x+2)$

3.- Simplifica la fracción algebraica:

a) $\dfrac{1}{x^2 - x} + \dfrac{2x-1}{x-1} - \dfrac{3x-1}{x}$

b) $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 2x - 15} : \dfrac{2x - 10}{x^2 - 25}$

c) $\dfrac{2x^3 - 5x^2 + 3x}{2x^2 + x - 6}$

Solución:

a) m.c.m. $\left[\left(x^2-x\right),(x-1),x\right]=x(x-1)$

$$\frac{1}{x^2-x}+\frac{2x-1}{x-1}-\frac{3x-1}{x}=\frac{1}{x(x-1)}+\frac{x(2x-1)}{x(x-1)}-\frac{(3x-1)(x-1)}{x(x-1)}=$$

$$=\frac{1}{x(x-1)}+\frac{2x^2-x}{x(x-1)}-\frac{3x^2-3x-x+1}{x(x-1)}=\frac{1+2x^2-x-3x^2+3x+x-1}{x(x-1)}=$$

$$=\frac{-x^2+3x}{x(x-1)}=\frac{x(-x+3)}{x(x-1)}=\frac{-x+3}{x-1}$$

b) Efectuamos el cociente:

$$\frac{x^2-6x+9}{x^2+2x-15}:\frac{2x-10}{x^2-25}=\frac{\left(x^2-6x+9\right)\left(x^2-25\right)}{\left(x^2+2x-15\right)(2x-10)}$$

Factorizamos para simplificar:

- $x^2-25=(x-5)\ (x+5)\ \rightarrow$ Producto notable

  $2x-10=2(x-5)$

- $x^2-6x+9=(x-3)^2$, ya que las raíces de $x^2-6x+9=0$ son:

  $$x=\frac{6\pm\sqrt{36-36}}{2}=\frac{6}{2}=3\rightarrow \text{Raíz doble}$$

- $x^2+2x-15=(x+5)\ (x-3)$, ya que las raíces de $x^2+2x-15=0$ son:

  $$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{-2\pm 8}{2}\begin{cases}\dfrac{-10}{2}=-5\\[2ex]\dfrac{6}{2}=3\end{cases}$$

Así:

$$\frac{\left(x^2-6x+9\right)\left(x^2-25\right)}{\left(x^2+2x-15\right)(2x-10)}=\frac{(x-3)^2(x-5)(x+5)}{(x+5)(x-3)2(x-5)}=\frac{x-3}{2}$$

c) Factorizamos ambos polinomios:

$2x^3-5x^2+3x=x\cdot(2x^2-5x+3)$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{4}=\frac{5\pm 1}{4}\begin{cases}\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\\[4pt]\frac{4}{4}=1\end{cases}$$

Luego:

$$2x^3-5x^2+3x=x(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)$$

$2x^2+x-6=(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)$ ya que:

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{4}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{4}=\frac{-1\pm 7}{4}\begin{cases}\frac{6}{4}=\frac{3}{2}\\[4pt]\frac{-8}{4}=-2\end{cases}$$

Por tanto:

$$\frac{2x^3-5x^2+3x}{2x^2+x-6}=\frac{x(x-1)\left(x-\frac{3}{2}\right)}{(x+2)\left(x-\frac{3}{2}\right)}=\frac{x(x-1)}{x+2}$$

4.-Halla el valor de k para que $P(x)=kx^3+2kx^2-3x+1$ sea divisible entre $x-1$.

Solución:

Para que $P(x)$ sea divisible ente $x-1$, ha de ser $P(1)=0$; es decir:

$$P(1)=k+2k-3+1=3k-2=0\ \rightarrow\ k=\frac{2}{3}$$

5.- a) Halla el valor numérico de $P(x)=3x^4-2x^3+2x-3$ para $x=1$.

b) ¿Es divisible el polinomio anterior, $P(x)$, entre $x-1$?

Solución:

a) $P(1)=3-2+2-3=0$

b) Si. Por el teorema del resto, sabemos que el resto de la división $P(x):(x-1)$ coincide con $P(1)$. En este caso $P(1)=0$, por tanto, $P(x)$ es divisible entre $x-1$.

6.- Expresa en forma de potencia, efectúa las operaciones y simplifica:

a) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a^7}$ **b)** $\sqrt[5]{2^3} : \sqrt{2}$

Solución:

a) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt{a^7} = a^{1/3} \cdot a^{7/2} = a^{23/6} = a^3 \sqrt[6]{a^5}$

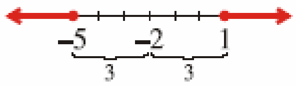
b) $\sqrt[5]{2^3} \div \sqrt{2} = 2^{3/5} \div 2^{1/2} = 2^{1/10} = \sqrt[10]{2}$

7.- Escribe en forma de intervalos los valores de x que cumplen:

$$|x+2| \geq 3$$

Solución:

Son los números de $(-\infty, -5] \cup [1, +\infty)$.



8.- Calcula y expresa el resultado en notación científica: $\dfrac{3,\ 7 \cdot 10^{12} - 4,\ 2 \cdot 10^{11} + 28 \cdot 10^{10}}{1,\ 2 \cdot 10^{-4}}$

Solución:

$$\frac{3{,}7 \cdot 10^{12} - 4{,}2 \cdot 10^{11} + 28 \cdot 10^{10}}{1{,}2 \cdot 10^{-4}} = \frac{370 \cdot 10^{10} - 42 \cdot 10^{10} + 28 \cdot 10^{10}}{1{,}2 \cdot 10^{-4}} =$$

$$= \frac{(370 - 42 + 28) \cdot 10^{10}}{1{,}2 \cdot 10^{-4}} = \frac{356 \cdot 10^{10}}{1{,}2 \cdot 10^{-4}} = 296{,}67 \cdot 10^{14} = 2{,}9667 \cdot 10^{16} \approx 2{,}97 \cdot 10^{16}$$

9.- Calcula y simplifica al máximo las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{\dfrac{84}{45}}\sqrt{\dfrac{21}{15}}$ **b)** $\sqrt{80} - 3\sqrt{45}$ **c)** $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$

Solución:

a) $\sqrt{\dfrac{84}{45}} \cdot \sqrt{\dfrac{21}{15}} = \sqrt{\dfrac{84 \cdot 21}{45 \cdot 15}} = \sqrt{\dfrac{2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 7}{3^2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5}} = \sqrt{\dfrac{2^2 \cdot 7^2}{3 \cdot 5^2}} = \dfrac{2 \cdot 7}{5} \cdot \sqrt{\dfrac{1}{3}} = \dfrac{14}{5} . \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{14}{5} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{14\sqrt{3}}{15}$

b) $\sqrt{80} - 3\sqrt{45} = \sqrt{2^4 \cdot 5} - 3\sqrt{3^2 \cdot 5} = 4\sqrt{5} - 9\sqrt{5} = -5\sqrt{5}$

c) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{5}}{\sqrt{6}-\sqrt{5}} = \dfrac{(\sqrt{6}+\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})}{(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})} = \dfrac{6+5+2\sqrt{30}}{6-5} = \dfrac{11+2\sqrt{30}}{1} = 11+2\sqrt{30}$

10.- Efectúa las siguientes operaciones y simplifica:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ **b)** $\dfrac{7}{3-\sqrt{2}}-\dfrac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{5}{\sqrt{6}}+\dfrac{2}{\sqrt{6}+3\sqrt{2}}-\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

a) $\dfrac{(\sqrt{2}+1)-(\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}=\dfrac{\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1}{2-1}=2$

b) $\dfrac{7(3+\sqrt{2})}{9-2}-\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{3-2}+\dfrac{2+\sqrt{3}}{4-3}=\dfrac{7(3+\sqrt{2})}{7}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2+\sqrt{3}=$

$=3+\sqrt{2}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2+\sqrt{3}=5$

c) $\dfrac{5\sqrt{6}}{6}+\dfrac{2(\sqrt{6}-3\sqrt{2})}{6-18}-\dfrac{4\sqrt{6}}{3}=\dfrac{5\sqrt{6}}{6}+\dfrac{2(\sqrt{6}-3\sqrt{2})}{-12}-\dfrac{4\sqrt{6}}{3}=$

$=\dfrac{5\sqrt{6}}{6}-\dfrac{(\sqrt{6}-3\sqrt{2})}{6}-\dfrac{4\sqrt{6}}{3}=\dfrac{5\sqrt{6}-\sqrt{6}+3\sqrt{2}-8\sqrt{6}}{6}=\dfrac{3\sqrt{2}-4\sqrt{6}}{6}=$

$=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$