Determina k para que los siguientes conjuntos de vectores sean linealmente dependientes:

a) $\vec{u}(k, -3, 2)$, $\vec{v}(2, 3, k)$, $\vec{w}(4, 6, -4)$

b) $\vec{u}(3, 2, 5)$, $\vec{v}(2, 4, 7)$, $\vec{w}(1, -1, k)$

a) $\begin{vmatrix} k & -3 & 2 \\ 2 & 3 & k \\ 4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = -6k^2 - 24k - 24 = -6(k^2 + 4k + 4) = -6(k + 2)^2 = 0 \quad \to \quad k = -2$

Si $k = -2$, los vectores son linealmente dependientes.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & -1 & k \end{vmatrix} = 8k + 5 = 0 \quad \to \quad k = \dfrac{-5}{8}$

Si $k = \dfrac{-5}{8}$, los vectores son linealmente dependientes.

Dados los vectores: $\vec{a} = \vec{i} + m\,\vec{j} + k$ y $\vec{b} = -2\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + m\,\vec{k}$, halla m para que los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ sean:

a) Paralelos. **b) Ortogonales.**

$\vec{a}(1, m, 1)$ $\vec{b}(-2, 4, m)$

a) $\dfrac{-2}{1} = \dfrac{4}{m} = \dfrac{m}{1} \quad \to \quad m = -2$

b) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (1, m, 1) \cdot (-2, 4, m) = -2 + 4m + m = 5m - 2 = 0 \quad \to \quad m = \dfrac{2}{5}$

Calcula los siguientes determinantes:

a) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 7 & 0 & -3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 7 \\ 3 & 7 & 6 & 9 \\ 1 & 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -7 \begin{vmatrix} 7 & -3 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ 1 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -7 \cdot 290 = -2030$

(1) Desarrollando por la 2ª columna.

b) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} -2 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot 28 + 2 \cdot 28 = 0$

(1) Desarrollando por la 4ª fila.

También podríamos haber observado que la 4ª columna es igual a la suma de las otras tres; y, por tanto, el determinante vale cero.

c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{(1)}{=} 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-12) - 4 \cdot (-2) = -36 + 8 = -28$

(1) Desarrollando por la 1ª fila.

Si $\begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$, ¿cuál es el valor de cada uno de estos determinantes? Justifica las respuestas:

a) $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix}$ **f)** $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} m+3n & p+3q \\ n & q \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} m & p \\ n & q \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

b) $\begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} - \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -(-5) = 5$

c) $\begin{vmatrix} 3n & -m \\ 3q & -p \end{vmatrix} \underset{(4)}{=} -3 \begin{vmatrix} n & m \\ q & p \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} 3 \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = 3 \cdot (-5) = -15$

d) $\begin{vmatrix} p & 2m \\ q & 2n \end{vmatrix} \underset{(4)}{=} 2 \begin{vmatrix} p & m \\ q & n \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} 2 \begin{vmatrix} p & q \\ m & n \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} -2 \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -2 \cdot (-5) = 10$

e) $\begin{vmatrix} 1 & n/m \\ mp & mq \end{vmatrix} \underset{(4)}{=} \dfrac{1}{m} \cdot m \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n \\ p & q \end{vmatrix} = -5$

f) $\begin{vmatrix} m & 5m \\ p & 5p \end{vmatrix} = 0$, pues las dos columnas son proporcionales.

Calcula el valor de este determinante dando el resultado factorizado:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 3+3x & x & x & x \\ 3+3x & 3 & x & x \\ 3+3x & x & 3 & x \\ 3+3x & x & x & 3 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=} (3+3x) \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 1 & 3 & x & x \\ 1 & x & 3 & x \\ 1 & x & x & 3 \end{vmatrix} = \begin{matrix} 1^{a} \\ 2^{a} - 1^{a} \\ 3^{a} - 1^{a} \\ 4^{a} - 1^{a} \end{matrix}$$

$$(3+3x) \begin{vmatrix} 1 & x & x & x \\ 0 & 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} \underset{(3)}{=} (3+3x) \begin{vmatrix} 3-x & 0 & 0 \\ 0 & 3-x & 0 \\ 0 & 0 & 3-x \end{vmatrix} =$$

$$= (3+3x)\,(3-x)^3 = 3(1+x)\,(x-3)^3$$

(1) Sumamos a la 1ª columna las demás.

(2) Sacamos $(3 + 3x)$ factor común, de la 1ª columna.

(3) Desarrollamos por la 1ª columna.

Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$, **calcula el valor de los siguientes determinantes:**

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix}$

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+7 & b+7 & c+7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 7 & 7 & 7 \\ x/2 & y/2 & z/2 \end{vmatrix} \underset{(2)}{=}$

$= \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} + 0 = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2}$

(1) Descomponemos el determinante en suma de dos.

(2) Sacamos $\frac{1}{2}$ factor común de la 3ª fila. El 2º determinante es 0, pues las dos primeras filas son proporcionales.

b) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ x & y & z \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} - \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \end{vmatrix} \underset{(1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 5$

(1) Cuando cambiamos de orden dos filas consecutivas, el determinante cambia de signo.

c) $\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+2x & b+2y & c+2z \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = \underset{\text{FILAS: } 1^a;\ 2^a-3^a;\ 3^a}{\longrightarrow} \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a & b & c \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} \underset{(1)}{=}$

$= 2 \begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = \underset{\text{FILAS: } 1^a+3^a;\ 2^a;\ 3^a}{\longrightarrow} 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 = 10$

(1) Sacamos factor común el 2 de la 3ª fila.

Halla las matrices X e Y que verifican el sistema

$$2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\left.\begin{aligned} 2X + Y &= \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ X - Y &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \text{ Sumando las dos ecuaciones, queda:}$$

$$3X = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Despejamos Y en la 2ª ecuación:

$$Y = X - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, $X = \begin{pmatrix} 2/3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $Y = \begin{pmatrix} -1/3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calcula A^n y B^n siendo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

- $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2/7 & 2/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

  Así, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Lo probamos por inducción:

  Acabamos de comprobar que para $n = 2$ (primer caso relevante), funciona.

  Suponemos que es cierto para $n - 1$:

  $A^n = A^{n-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & n-1/7 & n-1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n/7 & n/7 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$

  $B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^3 \end{pmatrix}$

Por tanto, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$. Lo probamos por inducción:

Igual que en el caso anterior, para $n = 2$ se cumple.

Suponemos que es cierto para $n - 1$:

$B^n = B^{n-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^{n-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

Resuelve por el método de Gauss:

a) $\begin{cases} x + 2z = 11 \\ x + y = 3 \\ y + z = 13 \\ x + y + z = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z - t = 0 \\ x + y - z - t = -1 \\ x + y + z - t = 2 \end{cases}$

a) $\left.\begin{array}{r} x \quad\quad + 2z = 11 \\ x + y \quad\quad = 3 \\ y + z = 13 \\ x + y + z = 10 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 13 \\ 1 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} - 1^{a} \\ 3^{a} \\ 4^{a} - 1^{a} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \to$

$\xrightarrow{\begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} - 2^{a} \\ 4^{a} - 2^{a} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 3 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} \\ 3^{a} - 3 \cdot 4^{a} \\ 4^{a} \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 0 & 1 & -2 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \to$

$\to \left.\begin{array}{r} x \quad + 2z = 11 \\ y - 2z = -8 \\ z = 7 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} y = -8 + 2z = -8 + 14 = 6 \\ x = 11 - 2z = 11 - 14 = -3 \end{array}\right\}$

Solución: $(-3, 6, 7)$

b) $\left.\begin{array}{r} x + y + z + t = 1 \\ x - y + z - t = 0 \\ x + y - z - t = -1 \\ x + y + z - t = 2 \end{array}\right\}$ $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\begin{array}{l} 1^{a} \\ 2^{a} - 1^{a} \\ 3^{a} - 1^{a} \\ 4^{a} - 1^{a} \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right) \to$

$\left.\begin{array}{r} x + y + z + t = 1 \\ -2y \quad\quad - 2t = -1 \\ z + t = 1 \\ -2t = 1 \end{array}\right\}$

$t = -\dfrac{1}{2} \qquad z = 1 - t = 1 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} \qquad y = \dfrac{2t - 1}{-2} = 1 \qquad x = 1 - y - z - t = -1$

Solución: $\left(-1, 1, \dfrac{3}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$

Halla las ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A(-4, 2, 5)$ y es paralela al eje OZ.

Si es paralela al eje OZ, tiene como vector dirección $(0, 0, 1)$.

- *Ecuación vectorial:*

$(x, y, z) = (-4, 2, 5) + \lambda(0, 0, 1)$

- *Ecuaciones paramétricas:*

$$\begin{cases} x = -4 \\ y = \ \ 2 \\ z = \ \ 5 + \lambda \end{cases}$$

- *Forma continua:*

$$\frac{x+4}{0} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-5}{1}$$

- *Forma implícita:*

$$\left.\begin{array}{lll} x = -4 & \rightarrow & x + 4 = 0 \\ y = \ \ 2 & \rightarrow & y - 2 = 0 \end{array}\right\}$$

Obtén el valor de a para el cual las rectas r y s se cortan, y halla el punto de corte:

$$r\colon x = y = z - a \qquad\qquad s\colon \frac{2x-1}{3} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-2}{0}$$

En s, divide por 2 el numerador y el denominador de la primera fracción.

$r\colon x = y = z - a \quad \rightarrow \quad \vec{d}_r(1, 1, 1);\ \ P(0, 0, a)$

$s\colon \dfrac{x-1/2}{3/2} = \dfrac{y+3}{-2} = \dfrac{z-2}{0} \quad \rightarrow \quad \vec{d}_s\left(\dfrac{3}{2}, -2, 0\right);\ \ P'\left(\dfrac{1}{2}, -3, 2\right)$

$PP'\left(\dfrac{1}{2}, -3, 2-a\right)$

$$M' = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 3/2 & 1/2 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 2-a \end{array}\right) \rightarrow \ \ ran\ (M) = 2$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Para que las rectas se corten, ha de ser $ran\ (M') = 2$, es decir, $|M'| = 0$:

$$|M'| = \frac{7a - 21}{2} = 0 \quad \rightarrow \quad a = 3$$

Para hallar el punto de corte, escribimos las rectas en forma paramétrica:

$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases} \qquad\qquad s: \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\mu \\ y = -3 - 2\mu \\ z = 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}\mu \\ \lambda = -3 - 2\mu \\ 3 + \lambda = 2 \end{array}\right\} \begin{array}{l} -1 = -3 - 2\mu \quad \rightarrow \quad \mu = -1 \\ \lambda = -1 \end{array}$$

Sustituyendo $\lambda = -1$ en las ecuaciones de r (o $\mu = -1$ en las de s), obtenemos el punto de corte: $(-1, -1, 2)$.

Halla las ecuaciones de los siguientes planos:

a) Determinado por el punto $A(1, -3, 2)$ y por los vectores $\vec{u}(2, 1, 0)$ y $\vec{v}(-1, 0, 3)$.

b) Pasa por el punto $P(2, -3, 1)$ y cuyo vector normal es $\vec{n}(5, -3, -4)$.

c) Perpendicular a la recta $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{3}$ y que pasa por el punto $(1, 0, 1)$.

a) $\vec{u} \times \vec{v} = (2, 1, 0) \times (-1, 0, 3) = (3, -6, 1)$

$3(x - 1) - 6(y + 3) + (z - 2) = 0$

$3x - 6y + z - 23 = 0$

b) $5(x - 2) - 3(y + 3) - 4(z - 1) = 0$

$5x - 3y - 4z - 15 = 0$

c) $\vec{n}(2, -1, 3)$

$2(x - 1) - (y - 0) + 3(z - 1) = 0$

$2x - y + 3z - 5 = 0$

Determina el valor de a para que las rectas r y s sean coplanarias:

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y - a}{1} = \frac{z}{0} \qquad\qquad s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$$

Halla el plano que las contiene.

$\vec{d_r}(1, 1, 0)$; $P(0, a, 0)$
$\vec{d_s}(1, -1, 1)$; $P'(1, 1, -1)$
$\overrightarrow{PP'}(1, 1-a, -1)$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1-a \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{ Para que las rectas sean coplanarias, ha de ser } |M'| = 0.$$

$|M'| = a + 2 = 0 \rightarrow a = -2$

Un vector normal al plano es: $\vec{d_r} \times \vec{d_s} = (1, 1, 0) \times (1, -1, 1) = (1, -1, -2)$

El plano que las contiene es: $1(x-1) - 1(y-1) - 2(z+1) = 0$

$$x - y - 2z - 2 = 0$$

Calcula el valor de m para que los puntos $A(m, 0, 1)$, $B(0, 1, 2)$, $C(1, 2, 3)$ y $D(7, 2, 1)$ estén en un mismo plano. ¿Cuál es la ecuación de ese plano?

Hallamos la ecuación del plano que contiene a B, C y D.

El plano será paralelo a $\overrightarrow{BC}(1, 1, 1)$ y a $\overrightarrow{CD}(6, 0, -2)$, es decir, a $(1, 1, 1)$ y a $(3, 0, -1)$. Un vector normal al plano es:

$$(1, 1, 1) \times (3, 0, -1) = (-1, 4, -3) \rightarrow \vec{n}(1, -4, 3)$$

La ecuación del plano es: $1(x-0) - 4(y-1) + 3(z-2) = 0$

$$x - 4y + 3z - 2 = 0$$

Para que A pertenezca al mismo plano, ha de ser:

$$m - 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 - 2 = 0 \rightarrow m + 1 = 0 \rightarrow m = -1$$

Estudia la posición de los siguientes planos según los valores de m:

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ x + (1+m)y + mz = m + 1 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ my + z = 0 \\ x + (1+m)y + mz = m + 1 \end{array}\right\} M' = \left(\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 1 & 1+m & m \end{array}}_{M} \left|\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ m+1 \end{array}\right.\right)$$

$$|M| = m^2 - m = 0 \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

- Si $m = 0$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ El 1º y el 3º son el mismo plano; el 2º los corta. Por tanto, se cortan en una recta.

- Si $m = 1$, queda:

$$M' = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\underbrace{}_{M}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \ \text{ y } \ |M| = 0 \ \rightarrow \ ran\,(M) = 2$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \ \rightarrow \ ran\,(M') = 3$$

Los planos se cortan dos a dos, pero no hay ningún punto común a los tres.

- Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$ $\rightarrow$ $ran\,(M) = ran\,(M') = 3$. Los planos se cortan en un punto.

Halla la ecuación de la recta r que pasando por el punto $P(2, 0, -1)$ corta a las rectas:

$$s_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z+1}{1} \qquad s_2: \begin{cases} x + y + 4 = 0 \\ y - 3z + 3 = 0 \end{cases}$$

Escribimos las dos rectas en forma paramétrica:

$$s_1: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \qquad s_2: \begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = -3 + 3\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

La recta r está determinada por los siguientes planos:

α: contiene a la recta s_1 y al punto P: $\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

β: contiene a la recta s_2 y al punto P: $\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Así, $r: \begin{cases} x - 2z - 4 = 0 \\ x + 3z + 1 = 0 \end{cases}$