Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de $A(3, -5)$ y de $B(7, 1)$. ¿De qué figura se trata?

Sea (x, y) un punto equidistante de A y B:

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+5)^2} = \sqrt{(x-7)^2+(y-1)^2}$$

$$\to x^2 - 6x + 9 + y^2 + 10y + 25 = x^2 - 14x + 49 + y^2 - 2y + 1$$

$$\to 2x + 3y - 4 = 0$$

Se trata de una recta, la mediatriz del segmento AB.

Calcula el lugar geométrico de los puntos del plano tales que su distancia a la recta de ecuación $3x - 5y - 15 = 0$ tenga el mismo valor que la ordenada y.

Sea (x, y) un punto del lugar geométrico.

$$\frac{|3x-5y-15|}{\sqrt{3^2+(-5)^2}} = y \to |3x-5y-15| = \sqrt{34}\,y$$

$$\to \begin{cases} 3x-5y-15 = \sqrt{34}\,y \\ -3x+5y+15 = \sqrt{34}\,y \end{cases} \to \begin{cases} 3x-\left(5+\sqrt{34}\right)\mathbf{y}-15=0 \\ 3x-\left(5-\sqrt{34}\right)y-15=0 \end{cases}$$

El lugar geométrico está formado por dos rectas perpendiculares.

Busca la ecuación reducida de una parábola de vértice $(0, 0)$ y directriz vertical, sabiendo que pasa por el punto $(5, -4)$.

La ecuación de la parábola es de la forma: $y^2 = 2px$

Como pasa por el punto $(5, -4)$: $16 = 2p \cdot 5 \to p = \dfrac{8}{5} \to y^2 = \dfrac{16}{5}x$

Determina la ecuación de una elipse en la que el eje mayor mide el doble que el menor y uno de los focos se halla en $(-7, 0)$.

$c = 7$

$2a = 2 \cdot 2b \to a = 2b$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \to 4b^2 = b^2 + 49 \to b^2 = \dfrac{49}{3} \to b = \dfrac{7\sqrt{3}}{3} \to a = \dfrac{14\sqrt{3}}{3}$

Por tanto, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{\frac{196}{3}} + \frac{y^2}{\frac{49}{3}} = 1 \to 3x^2 + 12y^2 = 196$$

Halla los vértices, los focos y las excentricidades de las siguientes elipses.

a) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$

b) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1$

c) $25x^2+16y^2=1.600$

d) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1$

e) $9x^2+25y^2=900$

f) $x^2+2y^2=16$

a) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1 \rightarrow \begin{cases} a=5 \rightarrow A(5, 0) \quad A'(-5, 0) \\ b=3 \rightarrow B(0, 3) \quad B'(0, -3) \end{cases}$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow c=4 \rightarrow F(4, 0) \qquad F'(-4, 0)$

La excentricidad es: $e=\dfrac{4}{5}=0{,}8$

b) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{25}=1 \rightarrow \begin{cases} b=4 \rightarrow B(4, 0) \quad B'(-4, 0) \\ a=5 \rightarrow A(0, 5) \quad A'(0, -5) \end{cases}$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow c=3 \rightarrow F(0, 4) \qquad F'(0, -4)$

La excentricidad es: $e=\dfrac{3}{5}=0{,}6$

c) $25x^2+16y^2=1.600 \rightarrow \dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{100}=1 \rightarrow \begin{cases} b=8 \rightarrow A(8, 0) \quad A'(-8, 0) \\ a=10 \rightarrow B(0, 10) \quad B'(0, -10) \end{cases}$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow c=6 \rightarrow F(0, 6) \qquad F'(0, -6)$

La excentricidad es: $e=\dfrac{6}{10}=0{,}6$

d) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{16}=1 \rightarrow \begin{cases} a=5 \rightarrow A(5, 0) \quad A'(-5, 0) \\ b=4 \rightarrow B(0, 4) \quad B'(0, -4) \end{cases}$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow c=3 \rightarrow F(3, 0) \qquad F'(-3, 0)$

La excentricidad es: $e=\dfrac{3}{5}=0{,}6$

e) $9x^2+25y^2=900 \rightarrow \dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1 \rightarrow \begin{cases} a=10 \rightarrow A(10, 0) \quad A'(-10, 0) \\ b=6 \rightarrow B(0, 6) \quad B'(0, -6) \end{cases}$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow c=8 \rightarrow F(8, 0) \qquad F'(-8, 0)$

La excentricidad es: $e=\dfrac{8}{10}=0{,}8$

f) $x^2+2y^2=16 \rightarrow \dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{8}=1 \rightarrow \begin{cases} a=4 \longrightarrow A(4, 0) \quad A'(-4, 0) \\ b=\sqrt{8}=2\sqrt{2} \rightarrow B\left(0, 2\sqrt{2}\right) \quad B'\left(0, -2\sqrt{2}\right) \end{cases}$

Como $a^2=b^2+c^2 \rightarrow c=2\sqrt{2} \rightarrow F\left(2\sqrt{2}, 0\right) \quad F'\left(-2\sqrt{2}, 0\right)$

La excentricidad es: $e=\dfrac{2\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0{,}707$

Encuentra las ecuaciones de las elipses que cumplen las siguientes condiciones.

a) La excentricidad es 0,6 y su eje mayor mide 20.

b) Los focos son (6, 0) y (−6, 0) y su excentricidad es $\frac{1}{3}$.

c) Pasa por el punto (3, −2) y su eje mayor mide 10.

d) Sus focos están en (4, 0) y (−4, 0) y dos de sus vértices son (5, 0) y (−5, 0).

a) $2a = 20 \rightarrow a = 10$

Si $e = 0{,}6 \rightarrow c = 6$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = 8 \rightarrow \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$

b) $c = 6$

Si $e = \frac{1}{3} \rightarrow a = 18$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = 12\sqrt{2} \rightarrow \frac{x^2}{324} + \frac{y^2}{288} = 1$

c) $2a = 10 \rightarrow a = 5$

Por ser el punto (3, 2) un punto de la elipse:

$$\frac{9}{25} + \frac{4}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{4}{b^2} = \frac{16}{25} \rightarrow b^2 = \frac{25}{4} \rightarrow b = \frac{5}{2}$$

Así, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1 \rightarrow x^2 + 4y^2 = 25$$

d) $\left.\begin{array}{l} c = 4 \\ a = 5 \end{array}\right\}$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \rightarrow b = 3 \rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

Determina los focos, los vértices, las asíntotas y las excentricidades de las siguientes hipérbolas.

a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$

b) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1$

c) $16y^2 - 25x^2 = 1.600$

d) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

e) $9x^2 - 25y^2 = 900$

f) $x^2 - 2y^2 = 16$

a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 5 \rightarrow A(5, 0) \quad A'(-5, 0) \\ b = 3 \rightarrow B(0, 3) \quad B'(0, -3) \end{cases}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{34} \rightarrow F\left(\sqrt{34}, 0\right) \quad F'\left(-\sqrt{34}, 0\right)$

La excentricidad es: $e = \frac{\sqrt{34}}{5} = 1{,}16$

b) $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{16} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 5 \rightarrow A(0, 5) \quad A'(0, -5) \\ b = 4 \rightarrow B(4, 0) \quad B'(-4, 0) \end{cases}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{41} \rightarrow F\left(0, \sqrt{41}\right) \quad F'\left(0, -\sqrt{41}\right)$

La excentricidad es: $e = \frac{\sqrt{41}}{5} = 1{,}28$

c) $16y^2 - 25x^2 = 1.600 \rightarrow \dfrac{y^2}{100} - \dfrac{x^2}{64} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 10 \rightarrow A(0, 10) & A'(0, -10) \\ b = 8 \rightarrow B(8, 0) & B'(-8, 0) \end{cases}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = 2\sqrt{41} \rightarrow F\left(0, 2\sqrt{41}\right) \quad F'\left(0, -2\sqrt{41}\right)$

La excentricidad es: $e = \dfrac{2\sqrt{41}}{10} = 1{,}28$

d) $\dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{16} = 1 \rightarrow \begin{cases} a = 5 \rightarrow A(5, 0) & A'(-5, 0) \\ b = 4 \rightarrow B(0, 4) & B'(0, -4) \end{cases}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow c = \sqrt{41} \rightarrow F\left(\sqrt{41}, 0\right) \quad F'\left(-\sqrt{41}, 0\right)$

La excentricidad es: $e = \dfrac{\sqrt{41}}{5} = 1{,}28$

Encuentra las ecuaciones de las hipérbolas que cumplen las siguientes condiciones.

a) Sus asíntotas son $y = 2x$ e $y = -2x$ y un foco tiene por coordenadas $\left(3\sqrt{5}, 0\right)$.

b) Los focos son $(-5, 0)$ y $(5, 0)$ y la distancia entre sus vértices es 8.

c) Las asíntotas son $y = \dfrac{1}{3}x$ e $y = -\dfrac{1}{3}x$ y pasa por el punto $\left(3\sqrt{29}, 5\right)$.

d) Un foco es $(6, 0)$ y su excentricidad es 1,2.

a) $\dfrac{b}{a} = 2 \rightarrow b = 2a \qquad c = 3\sqrt{5}$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 45 = a^2 + 4a^2 \rightarrow a^2 = 9 \rightarrow a = 3 \rightarrow b = 6 \rightarrow \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{36} = 1$

b) $c = 5 \qquad 2a = 8 \rightarrow a = 4$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow 25 = 16 + b^2 \rightarrow b^2 = 9 \rightarrow b = 3 \rightarrow \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

c) $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{3} \rightarrow a = 3b$

Por ser el punto $\left(3\sqrt{29}, 5\right)$ un punto de la hipérbola:

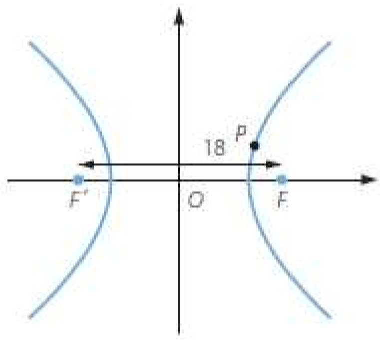
$\dfrac{261}{9b^2} - \dfrac{25}{b^2} = 1 \rightarrow \dfrac{36}{9b^2} = 1 \rightarrow b^2 = 4 \rightarrow b = 2 \rightarrow a = 6$

Así, la ecuación de la hipérbola es: $\dfrac{x^2}{36} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

d) $c = 6 \qquad e = \dfrac{c}{a} = 1{,}2 \rightarrow a = 5$

Como $c^2 = a^2 + b^2 \rightarrow b = \sqrt{11} \rightarrow \dfrac{x^2}{25} - \dfrac{y^2}{11} = 1$

Encuentra la ecuación de una hipérbola cuyo eje focal mide 18 y pasa por el punto P (15, 4).



$2a = 18 \rightarrow a = 9$

Por pertenecer el punto (15, 4) a la hipérbola:

$$\frac{225}{81} - \frac{16}{b^2} = 1 \rightarrow 225b^2 - 1.296 = 81b^2$$

$$\rightarrow 144b^2 = 1.296 \rightarrow b = 3$$

Así, la ecuación de la hipérbola es: $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{9} = 1$

Encuentra el foco y la directriz de las siguientes parábolas. Represéntalas gráficamente.

a) $y^2 = 10x$

b) $y^2 = 7x$

c) $x^2 = 6y$

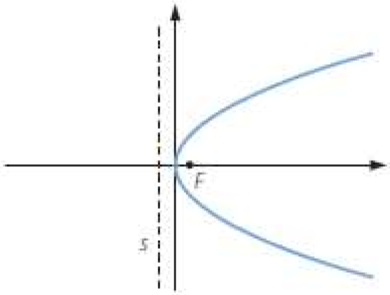
d) $x^2 = y$

e) $y^2 = -10x$

f) $x^2 = -6y$

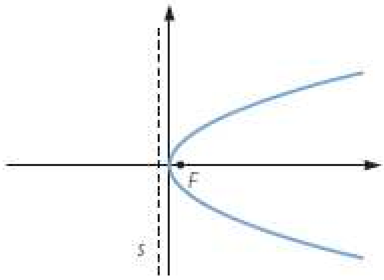
a) $2p = 10 \rightarrow p = 5 \rightarrow F\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

Directriz: $x = -\frac{5}{2}$



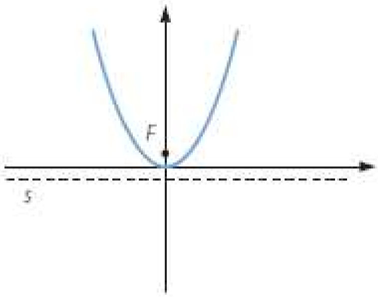
b) $2p = 7 \rightarrow p = \frac{7}{2} \rightarrow F\left(\frac{7}{4}, 0\right)$

Directriz: $x = -\frac{7}{2}$



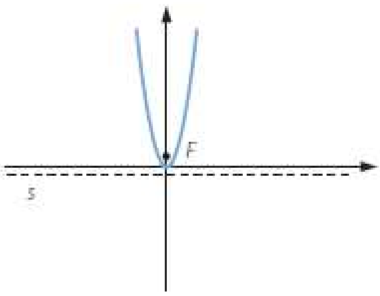
c) $2p = 6 \rightarrow p = 3 \rightarrow F\left(0, \frac{3}{2}\right)$

Directriz: $y = -\frac{3}{2}$



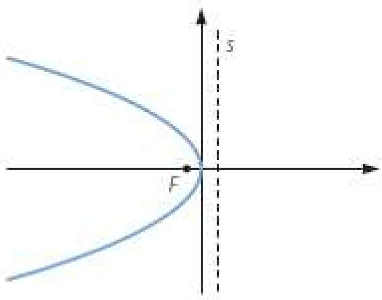
d) $2p = 1 \rightarrow p = \frac{1}{2} \rightarrow F\left(0, \frac{1}{4}\right)$

Directriz: $y = -\frac{1}{4}$



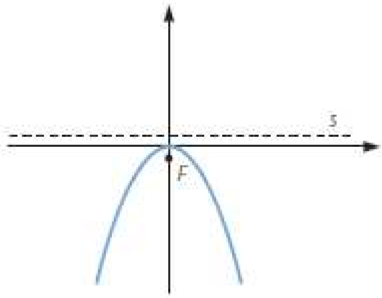
e) $2p = -10 \rightarrow p = -5 \rightarrow F\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$

Directriz: $x = \frac{5}{2}$



f) $2p = -6 \rightarrow p = -3 \rightarrow F\left(0, -\frac{3}{2}\right)$

Directriz: $y = \frac{3}{2}$



Obtén los vértices, focos y directrices de las parábolas.

a) $y^2 = 2(x - 3)$

b) $(y - 1)^2 = 4(x - 4)$

c) $x^2 = 6(y - 2)$

d) $(x - 3)^2 = 8(y + 1)$

e) $x^2 = -4(y + 1)$

f) $(y + 3)^2 = -8(x - 1)$

a) $V(3, 0)$

$2p = 2 \rightarrow p = 1 \rightarrow F\left(\frac{7}{2}, 0\right)$ Directriz: $x = \frac{5}{2}$

b) $V(4, 1)$

$2p = 4 \rightarrow p = 2 \rightarrow F(5, 1)$ Directriz: $x = 3$

c) $V(0, 2)$

$2p = 6 \rightarrow p = 3 \rightarrow F\left(0, \frac{7}{2}\right)$ Directriz: $y = \frac{1}{2}$

d) $V(3, -1)$

$2p = 8 \rightarrow p = 4 \rightarrow F(3, 1)$ Directriz: $y = -3$

e) $V(0, -1)$

$2p = 4 \rightarrow p = 2 \rightarrow F(0, -3)$ Directriz: $y = 1$

f) $V(1, -3)$

$2p = 8 \rightarrow p = 4 \rightarrow F(-1, -3)$ Directriz: $x = 3$