Ejercicios de Potencias y Raices

Dado un cuadrado de 100 m² de área, se quiere construir otro cuadrado cuya área sea doble.

a) ¿Por cuánto hay que multiplicar el lado del primer cuadrado?

b) ¿Qué sucede si multiplicamos el lado del primer cuadrado por 2?

Solución:

a) Como el área de un cuadrado es igual al cuadrado de su lado, siendo a y b los lados del primer y segundo cuadrado respectivamente, se tendrá: $b^2 = 2a^2 \Rightarrow b = \sqrt{2a^2} \Rightarrow b = \sqrt{2} \cdot a$. Tendremos que multiplicar el lado del primer cuadrado por $\sqrt{2}$, operación que tendremos que realizar con la aproximación que deseemos.

b) Si multiplicamos el lado a del primer cuadrado por 2, tendremos un cuadrado cuya área es $S = (2a)^2 = 4 \cdot a^2$ y como a^2 representa el área del primer cuadrado, obtendremos un cuadrado de área cuádruple, es decir de 400 m² de área.

Escribe en forma potencial las siguientes expresiones:

a) $5^x \cdot 7^x \cdot 2^x$ **b)** $\sqrt{\sqrt{x}}$ **c)** $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{x}}}$ **d)** $\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt[3]{x}}}}$

Solución:

a) $5^x \cdot 7^x \cdot 2^x = (5 \cdot 7 \cdot 2)^x = 70^x$

b) Pasando las raíces a forma potencial, se tiene: $\sqrt{\sqrt{x}} = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{4}}$

c) Análogamente: $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt{x}}} = \left(\left(x^{1/2}\right)^{1/2}\right)^{1/3} = x^{1/12}$

d) Análogamente a los dos casos anteriores: $\sqrt{\sqrt[5]{\sqrt{\sqrt[3]{x}}}} = \left(\left(\left(x^{1/3}\right)^{1/2}\right)^{1/5}\right)^{1/2} = x^{1/60}$

Simplifica las siguientes expresiones hasta escribirlas en la forma $a^{1/n}$:

a) $\sqrt[5]{\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}{\sqrt[6]{3}}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[5]{\sqrt{3}\sqrt{2}}\cdot\sqrt[10]{\dfrac{5}{6}}}{\sqrt{\sqrt[5]{5}}}$

Solución:

a) $\sqrt[5]{\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{2}}}{\sqrt[6]{3}}}=\left(\dfrac{\left(2^{1/3}\right)^{1/2}}{3^{1/6}}\right)^{1/5}=\dfrac{2^{1/30}}{3^{1/30}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{1/30}$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{\sqrt{3}\sqrt{2}}\cdot\sqrt[10]{\dfrac{5}{6}}}{\sqrt{\sqrt[5]{5}}}=\dfrac{\left((3\cdot 2)^{1/2}\right)^{1/5}\dfrac{5^{1/10}}{6^{1/10}}}{\left(5^{1/5}\right)^{1/2}}=\dfrac{6^{1/10}5^{1/10}}{5^{1/10}6^{1/10}}=1$

Racionaliza y simplifica:

a) $\dfrac{-\sqrt{x}}{x\sqrt[3]{2x^2}}$ **b)** $\dfrac{5}{4\sqrt[3]{ab^2}}$

Solución:

a) $\dfrac{-\sqrt{x}}{x\sqrt[3]{2x^2}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{2^2x}}{\sqrt[3]{2^2x}}=\dfrac{-\sqrt{x}\sqrt[3]{2^2x}}{2x^2}=-\dfrac{\sqrt[3]{4}\sqrt[6]{x}}{2x}$

b) $\dfrac{5}{4\sqrt[3]{ab^2}}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{a^2b}}{\sqrt[3]{a^2b}}=\dfrac{5\sqrt[3]{a^2b}}{4ab}$

Racionaliza las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

Solución:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{5}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}{3+2+2\sqrt{6}-5}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2\sqrt{6}}\cdot\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}=\dfrac{\sqrt{18}+\sqrt{12}+\sqrt{30}}{12}$

b) $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}-\sqrt{3}+\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\sqrt{7}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\dfrac{7+\sqrt{21}+\sqrt{14}}{7+2-3+2\sqrt{14}}=\dfrac{7+\sqrt{21}+\sqrt{14}}{6+2\sqrt{14}}\cdot\dfrac{6-2\sqrt{14}}{6-2\sqrt{14}}=\dfrac{14-8\sqrt{14}+6\sqrt{21}-14\sqrt{6}}{-20}$

Simplifica

a) $\left(\dfrac{4x^{-3}a^{\frac{1}{3}}}{64x^{5}a^{\frac{-2}{3}}}\right)^{\frac{-2}{3}}$ b) $\dfrac{\sqrt[5]{x}\cdot x^{2}\cdot x^{\frac{1}{5}}\cdot\sqrt{x^{3}}}{x^{\frac{3}{15}}\cdot\sqrt[3]{x^{2}}}$

Solución:

a) $\dfrac{2^{4}\,x^{\frac{16}{3}}}{a^{\frac{2}{3}}}$ b) $x^{\frac{91}{30}}$

Expresa como una única raíz, simplifica y saca factores:

a) $\dfrac{\sqrt[4]{x^{3}}\cdot\left(\sqrt[6]{x^{7}}\right)^{2}}{\sqrt{\sqrt[3]{x^{5}}}}$ b) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{32}}{\sqrt[3]{4^{2}}\cdot\sqrt[6]{8}}}$

Solución:

a) $x^{2}\,\sqrt[4]{x}$

b) $\dfrac{1}{\sqrt[24]{x}}$

Encuentra el valor de a para que:

$\sqrt{8+4\sqrt{3}}-\sqrt{8-4\sqrt{3}}=\sqrt{a}$

Solución:

$\left(\sqrt{8+4\sqrt{3}}-\sqrt{8-4\sqrt{3}}\right)^{2}=8+4\sqrt{3}+8-4\sqrt{3}-2\sqrt{8+4\sqrt{3}}\,\sqrt{8-4\sqrt{3}}=16-2\sqrt{64-48}=8$

Por lo que a = 8.

Calcula los siguientes radicales

a) $\sqrt[3]{-0{,}027}$ **b)** $\sqrt[4]{0{,}0256}$ **c)** $\sqrt[3]{270000\sqrt{0{,}01}}$ **d)** $\sqrt[4]{\sqrt{256b^8}}$

Solución:

a) -0.3 b) 0.4 c) 30 d) 2b