

075 Obtener el valor de  $a$  para que el rango de la matriz  $A$  sea igual a 2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 6 & a \end{pmatrix}$$

(La Rioja. Junio 2003. Propuesta A. Ejercicio 1)

$$\left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 0 & & & \\ 2 & 3 & 0 & -1 & & & \\ 4 & -1 & 6 & a & & & \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_2 = F_2 - 2F_1 \\ F_3 = F_3 - 4F_1}} \left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 0 & & & \\ 0 & 7 & -6 & -1 & & & \\ 0 & 7 & -6 & a & & & \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 = F_3 - F_2} \left( \begin{array}{cccc|ccc} 1 & -2 & 3 & 0 & & & \\ 0 & 7 & -6 & -1 & & & \\ 0 & 0 & 0 & a+1 & & & \end{array} \right)$$

Para que el rango sea 2, el término  $a + 1$  tiene que ser cero, luego  $a = -1$ .

082 Discutir, en función del número real  $m$ , el rango de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & m \\ 1+m & 2 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .

(Castilla y León. Septiembre 2007. Prueba B. Cuestión 1)

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & m & & & \\ 1+m & 2 & 3 & & & \\ -2 & -1 & 2 & & & \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & m & & & \\ -2 & -1 & 2 & & & \\ 1+m & 2 & 3 & & & \end{array} \right) \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & m & & & \\ -1 & -2 & 2 & & & \\ 2 & 1+m & 3 & & & \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{F_2 = F_2 + F_1 \\ F_3 = F_3 - 2F_1}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & m & & & \\ 0 & 0 & m+2 & & & \\ 0 & m-3 & 3-2m & & & \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_2} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & m & & & \\ 0 & m-3 & 3-2m & & & \\ 0 & 0 & m+2 & & & \end{array} \right)$$

- Si  $m = -2 \rightarrow$  Rango  $(A) = 2$ , todos los elementos de la última fila son 0.
- Si  $m = 3 \rightarrow$  Rango  $(A) = 2$ , las filas 2.ª y 3.ª son proporcionales.
- Si  $m = -2$  y  $m = 3 \rightarrow$  Rango  $(A) = 3$

086 Sean las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ .

Vemos que ambas tienen rango máximo, o sea 2. Determinar los valores de  $c$  tales que la matriz  $A + cB$  no tenga rango 2. ¿Cuál es el rango que tienen las respectivas matrices suma?

(Aragón. Septiembre 2003. Opción B. Cuestión 1)

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} + c \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 4(1+c) & 2-c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 4(1+c) & 2-c \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 = F_2 - 4F_1} \begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 0 & 6-c \end{pmatrix}$$

- Si  $c = -1$  o  $c = 6$ , el rango de la matriz no es 2.
  - Si  $c = -1 \rightarrow$  Rango de la matriz  $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$  es 1.
  - Si  $c = 6 \rightarrow$  Rango de la matriz  $\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 28 & -4 \end{pmatrix}$  es 1.
- Si  $c \neq -1$  y  $c \neq 6 \rightarrow$  Rango de la matriz  $\begin{pmatrix} 1+c & -1 \\ 4(1+c) & 2-c \end{pmatrix}$  es 2.

093 Calcular, si es posible, la inversa de la matriz:  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

(Murcia. Junio 2008. Bloque 1. Cuestión A)

$$\left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 = F_2 + F_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{F_1 = F_1 - 2F_2 \\ F_3 = F_3 + \frac{2}{5}F_2}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4/5 & 3/5 & -2/5 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1/5 & 2/5 & 2/5 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{F_1 = F_1 - 4F_3 \\ F_2 = F_2 - 15F_3}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 5 & 0 & -5 & -5 & -15 \\ 0 & 0 & -1/5 & 2/5 & 2/5 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{F_2 = \frac{1}{5}F_2 \\ F_3 = -5F_3}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & -2 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1/5 & 2/5 & 2/5 & 1 \end{array} \right)$$

La matriz inversa de  $A$  es:  $\begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & -1 & -3 \\ -2 & -2 & -5 \end{pmatrix}$

097

Comprueba que la inversa de la matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  es la matriz

$$A^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

(Balears. Junio 2005. Opción B. Cuestión 4)

Para comprobar que una matriz es la inversa de otra, basta con multiplicar las matrices y ver que el resultado es la identidad.

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

099

Estudia para qué valores de  $m$  la matriz siguiente tiene inversa:

$$\begin{pmatrix} m & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ m & 0 & m \end{pmatrix}$$

En caso de ser posible, halla su inversa para  $m = -1$ .

(Castilla-La Mancha. Año 2005. Supuesto 4. Bloque 3. Pregunta B)

$$\begin{aligned} \left( \begin{array}{ccc|ccc} m & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ m & 0 & m & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) & \xrightarrow{r_3 = r_3 - r_1} \left( \begin{array}{ccc|ccc} m & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & m-1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\substack{r_1 = r_1 - \frac{1}{m-1}r_3 \\ r_2 = r_2 - \frac{1}{m-1}r_3}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} m & 0 & 0 & m/(m-1) & 0 & -1/(m-1) \\ 0 & 1 & 0 & 1/(m-1) & 1 & -1/(m-1) \\ 0 & 0 & m-1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{\substack{r_1 = \frac{1}{m}r_1 \\ r_2 = \frac{1}{m-1}r_2}} \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1/(m-1) & 0 & -1/(m(m-1)) \\ 0 & 1 & 0 & 1/(m-1) & 1 & -1/(m-1) \\ 0 & 0 & 1 & -1/(m-1) & 0 & 1/(m-1) \end{array} \right) \end{aligned}$$

102

En la matriz  $A$  determina  $a$ ,  $b$  y  $c$  para que su traspuesta coincida con su inversa.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

$$A^t = A^{-1} \rightarrow AA^t = AA^{-1} \rightarrow AA^t = I$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ a & b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1/\sqrt{2} & b \\ 0 & 1/\sqrt{2} & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & \frac{b+c}{\sqrt{2}} \\ a & \frac{b+c}{\sqrt{2}} & a^2 + b^2 + c^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Multiplicando e igualando términos se obtiene este sistema de ecuaciones.

$$\left. \begin{array}{l} a = 0 \\ \frac{b+c}{\sqrt{2}} = 0 \\ a^2 + b^2 + c^2 = 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{a=0} \left. \begin{array}{l} b = -c \\ b^2 + c^2 = 1 \end{array} \right\} \xrightarrow{a=0, b=-c} c^2 + c^2 = 1 \rightarrow c = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Hay dos soluciones:  $c = \frac{1}{\sqrt{2}}, b = -\frac{1}{\sqrt{2}}, a = 0$      $c = -\frac{1}{\sqrt{2}}, b = \frac{1}{\sqrt{2}}, a = 0$

Comprueba y contesta.

- a) Si  $A$  es una matriz no singular y  $(B - C)A = 0$ , siendo  $0$  la matriz nula, comprueba que  $B = C$ .
- b) Según el resultado del apartado anterior, cuando  $A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ , la única matriz  $X$  que verifica la ecuación  $XA = 0$  es la matriz nula. ¿Es cierta esta afirmación? ¿Por qué?

Nota: Matriz singular es aquella que no tiene inversa.

(Asturias. Junio 2003. Bloque 2)

- a)  $(B - C)A = 0 \rightarrow BA - CA = 0 \rightarrow BA = CA \rightarrow BAA^{-1} = CAA^{-1} \rightarrow B = C$
- b) La afirmación es falsa, pues el apartado a) requiere la condición de que la matriz  $A$  sea no singular, sin embargo, en este caso  $\text{Rango}(A) = 1$ , con lo que la matriz es singular.

$$\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{r_2 = r_2 + \frac{1}{2}r_1} \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$