

VIII feria
Madrid es Ciencia
12-15 de abril de 2007

IES Barrio de Bilbao
Juguemos a la Geometría

Temas de geometría

La geometría en nuestro día a día

Conocí una vez a una persona que se lamentaba de que se le daba muy mal la geometría por que manejaba muy mal la regla y el compás. Le pregunté entonces si era capaz de realizar buenas mediciones sobre un terreno, y, me dijo, que se defendía bastante bien, por que al fin y al cabo eso era medir. Le dije entonces que no, que tomar mediciones en un terreno es hacer *Geometría*. Me miró atónito, entonces le expliqué la etimología griega de la palabra, *Geo* significa *Tierra*, y *Metron* significa *medir*.

Ante su sorpresa me decidí a contarle algunos ejemplos que le mostraran como en el día a día podemos resolver muchos problemas de medida utilizando los métodos de la *Geometría*.

Arquímedes decía que *“la geometría es el arte de razonar sobre un dibujo mal hecho”*. Hilbert concretó la geometría en *“el estudio de las propiedades de incidencia, medida y transformación que tienen asociadas ciertos conjuntos de puntos que llamamos figuras”*.

Le comenté entonces que este razonar sobre las propiedades de algunas figuras está muy relacionado con lo que observamos en nuestra vida. Algunas de estas figuras son precisamente la recta y la circunferencia, que tan mal se le daban, pero que había muchas más (triángulos, cuadriláteros, ..., parábolas, espirales, ...). Las regularidades que se dan en estas figuras permiten resolver muchos problemas de medida, en particular cuando hay que medir sobre sitios de difícil o imposible acceso.

Astronomía Griega

¿Cómo pudieron demostrar los griegos que la esfera del Sol era mucho más grande que la de la Luna, y que además se encontraba mucho más lejos?

Hoy, que sabemos la respuesta el problema parece insulso, pero en su día fue esencial. Si vemos dos objetos de la misma forma pero de distinto tamaño, en realidad no podemos decir cual es más grande y cual se encuentra más cerca, pues los objetos más lejanos los percibimos más pequeños.

Afortunadamente, podemos encontrar una solución. La geometría nos enseña un resultado útil, *“En un triángulo rectángulo la hipotenusa tiene más longitud que cualquiera de los catetos”*.

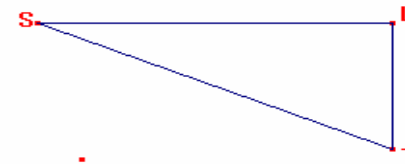


Figura 1

Aprovechémonos ahora de que la Luna orbita alrededor de la Tierra y presenta fases. ¿Cuál debe ser la configuración Sol-Tierra-Luna para que veamos la Luna exactamente como cuarto creciente o decreciente?

Puesto que sólo vemos la mitad de la esfera lunar, la configuración Sol-Tierra-Luna debe ser la de un triángulo rectángulo, estando la Luna precisamente en el vértice del ángulo recto, como muestra la Figura 1. Pero entonces, la línea Sol-Tierra es la hipotenusa, y la línea Luna-Tierra un cateto, por lo que la distancia Sol-Tierra tiene que ser mayor que la distancia Luna-Tierra. Finalmente, puesto que aparentemente la esfera solar es mayor que la esfera lunar, el Sol, por estar más lejos debe ser bastante más grande que la Luna.

Aplicaciones en la jardinería

¿Cómo podemos plantar un seto circular alrededor de un estanque irregular de agua si queremos que la circunferencia del seto esté centrada en un punto interior del estanque?

Parece complicado poder trazar una circunferencia si no tenemos acceso al centro, pero de nuevo, afortunadamente podemos encontrar una solución. También ahora la geometría nos enseña unos resultado útiles.

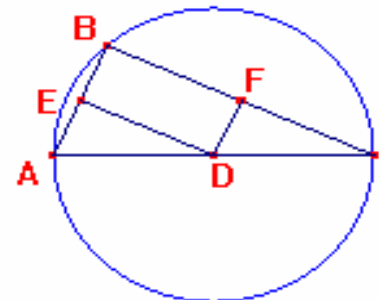


Figura 2

“Las mediatrices de los lados de un triángulo rectángulo se cortan en el punto medio de la hipotenusa”. La figura 2 muestra el triángulo rectángulo ABC, al que se le han dibujado las mediatrices de los dos catetos. Observa que los triángulos rectángulos AED y DFC son iguales, pues sus catetos correspondientes lo son, luego deben ser iguales sus hipotenusas, entonces el punto D es el punto medio de la hipotenusa AC.

Por tanto D es el centro de la circunferencia que circunscribe al triángulo ABC.

“El ángulo inscrito en una circunferencia vale la mitad del ángulo central subtendido por sus lados”. La figura 3, construida a partir de la anterior, muestra aprovechando esta propiedad, que si movemos el punto B a lo largo de la circunferencia seguiremos teniendo ABC en configuración de triángulo rectángulo en B. Por tanto “La circunferencia es el conjunto de puntos desde los que los extremos de un segmento se ven bajo un ángulo recto”. A esta construcción los griegos la denominaron *Lugar de Thales*.

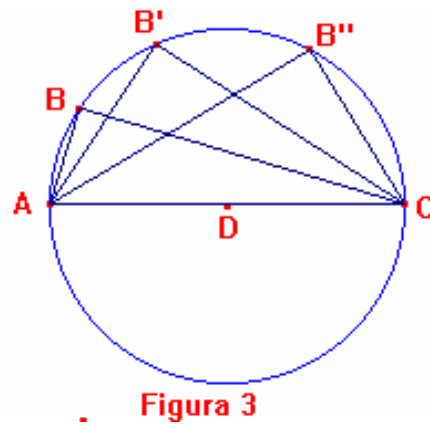


Figura 3

Utilizando el *Lugar de Thales* nuestro problema tiene fácil solución.

Marcamos alrededor del estanque los dos puntos extremos de un diámetro de la circunferencia del seto. Ponemos en ellos una estaca. Nos dotamos de un visor de doble línea de vista, y ponemos ambas líneas de vista formando un ángulo recto entre sí. Ahora, partiendo de uno de los puntos extremos del diámetro que hemos marcado, nos vamos moviendo de forma que en todo momento estemos viendo en cada una de las líneas de vista una de las estacas. La trayectoria que iré siguiendo es la circunferencia deseada.

Aplicaciones para el posicionamiento.

¿Puedo posicionarme en un mapa sabiendo la distancia a la que me encuentro de algunos puntos que reconozco?

En este caso la respuesta es simple, sí. La geometría nos enseña dos resultados útiles “La circunferencia es el conjunto de puntos que equidistan de otro”, y “Dos circunferencias se cortan a lo sumo en dos puntos”. Por tanto, bastará reconocer tres puntos y conocer a que distancia nos encontramos de ellos.

La figura 4, nos enseña que si conocemos la distancia d_1 a un punto conocido A, entonces me encuentro sobre una circunferencia de centro el punto A y radio d_1 . Si tengo la misma información para un segundo punto B, entonces necesariamente estoy en la intersección de las circunferencias correspondientes centradas en A y B (puntos D y D'). Si poseo la información para un tercer punto, entonces ya puedo discernir e identificar que me encuentro en el punto D.

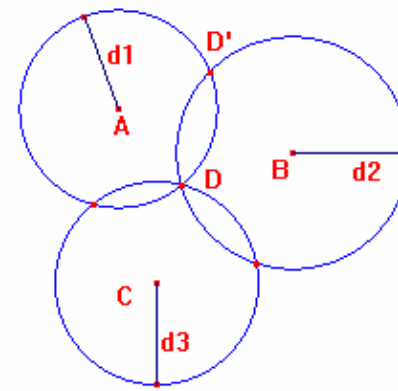


Figura 4

Esta estrategia de posicionamiento es la que utilizan las centrales de teléfonos móviles para localizar la posición de los usuarios utilizando como puntos de referencia las antenas de la red. Esta misma estrategia es la base del sistema de posicionamiento estadounidense GPS, y del futuro sistema europeo Galileo, usando como puntos de referencia satélites que orbitan nuestro planeta.

Sin embargo, medir grandes distancias a antenas o a satélites es algo complejo, que hoy se puede hacer con medios electrónicos. Cuando nos restringimos a medios mecánicos es muy difícil medir grandes distancias con precisión. En, el ejemplo de la jardinería hemos visto que si es aparentemente asequible usando visores medir ángulos.

¿Puedo posicionarme en un mapa sabiendo el ángulo bajo el cual estoy viendo dos puntos identificados?

También la geometría proporciona un resultado útil, “El valor de un ángulo inscrito en una circunferencia es la mitad del ángulo central subtendido por su arco”. Gracias a este resultado basta con reconocer tres puntos del mapa y ser capaz de medir el ángulo bajo el que vemos dos parejas.

La figura 5 muestra la construcción. Sean A, B y C los puntos conocidos, y supongamos que mediante un visor de doble línea de vista somos capaces de saber que desde nuestra posición el ángulo que forman las visuales a A y a B es α . Entonces, con base el segmento AB, construimos la semirrecta r formando un ángulo α en A. Por A trazamos una perpendicular a la recta r, y la cortamos con la mediatriz del segmento AB, en el punto O. Observa entonces que el ángulo AOB vale 2α , luego si trazo la circunferencia de centro O, y radio OA, que obviamente pasa por B, desde cualquier punto de esa circunferencia, las visuales trazadas a los puntos A y B forman un ángulo α . Por tanto yo me encuentro sobre esa circunferencia.

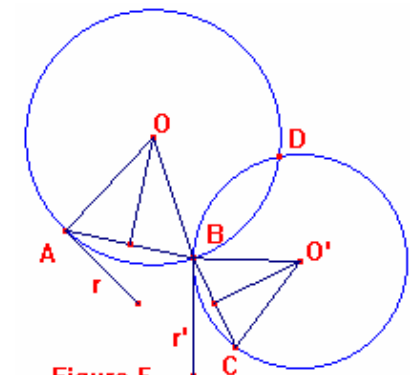


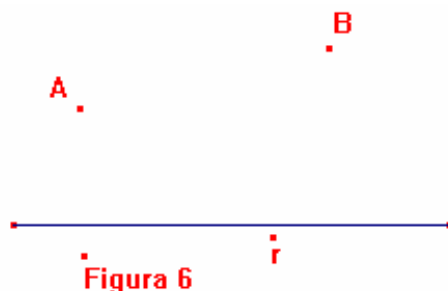
Figura 5

Si conozco también el ángulo bajo el que veo otra pareja de puntos (por ejemplo el B y el C, bajo ángulo α'), aplicando el mismo procedimiento puedo construir otra circunferencia, en este caso de centro O' y radio O'B. Desde cualquiera de sus puntos veo el par de puntos B y C bajo ángulo α' . Luego me debo encontrar en la intersección de ambas circunferencias. Observa que en este caso, el punto B es común a ambas circunferencias, y como ese punto lo he identificado debo saber previamente si estoy en él. Lo cual me indica, que si no estoy en B debo estar en la otra intersección, que es el punto D.

Este método, conocido como el método del arco capaz, ha sido el método utilizado por los marinos para posicionarse en navegación próxima a la costa. Como vemos tiene la ventaja de necesitar tan sólo dos medidas angulares, frente al método de las distancias, que precisa de tres medidas.

Otras ideas

A la vista de estas construcciones, mi amigo comenzó a encariñarse con las construcciones con regla y compás. Entonces le propuse que me encontrara la solución al siguiente problema. “¿Dados dos puntos en el plano, eres capaz de decirme cuál es el camino más corto entre ellos?”. Rápidamente me dijo que era el segmento que une los dos puntos, pues “el camino más corto entre dos puntos es la línea recta”. Entonces, se lo compliqué un poquito y le propuse el siguiente ejercicio,

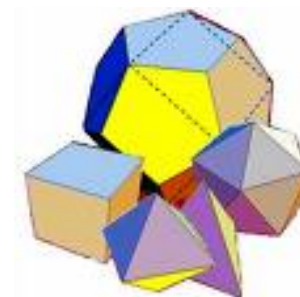
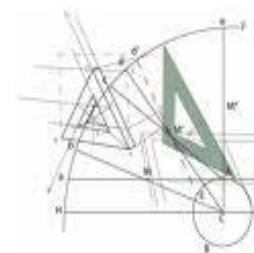
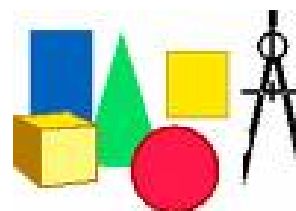
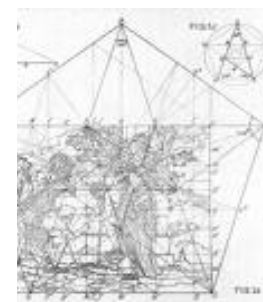


“Dado en el plano dos puntos A y B y una recta r, ¿eres capaz de encontrar el camino más corto formado por segmentos que va de A a B tocando la recta r?” (Indicación, considera el punto B' simétrico de B respecto de la recta r).

Cuando observé que mi amigo comenzaba a disfrutar de la *Geometría* le comenté que casi todas estas ideas se pueden leer en una antigua obra. La escribió Euclides de Alenjandría ($\approx 325aC-256aC$), se denomina *Elementos*, y consta de trece libros. Esta obra ha sido la que más veces se ha publicado y más influencia ha tenido en toda la historia de la Matemática.

Por último me decidí a comentarle alguna de las dificultades de la *Geometría*. Euclides estableció como postulado (una verdad que consideramos por evidente como cierta sin demostración) que “por un punto exterior a una recta solo se puede trazar una paralela a la primera”. Entonces, le pregunté que si sabía cuanto sumaban las medidas de los ángulos interiores de un triángulo. Rápidamente me contestó que 180 grados, que lo recordaba muy bien del

colegio. Le comenté si pensaba que eso era verdad para todos los triángulos, y me dijo que sí. Le comente, que lo que él decía es verdad si se acepta el postulado de Euclides (por cierto, intenta probarlo). Luego le sugerí que pensara en el siguiente triángulo construido sobre la esfera de la Tierra: “Imagina que estás en el polo norte y que empiezas a bajar por el meridiano de Greenwich (longitud 0 grados) hasta que llegas al ecuador. Entonces sigues andando por el ecuador hasta que te encuentras con el meridiano de longitud 90 grados Este, en ese momento sigues ese meridiano hasta que llegas al polo norte”. Le hice observar que había descrito un triángulo mediante tres arcos de circunferencia sobre una esfera, y que esos arcos en los puntos en que se encontraban formaban un ángulo de 90 grados. Entonces, la suma de los tres ángulos de ese triángulo sobre la esfera es 270 grados, que es mayor de 180 grados. Rápidamente me indicó que aquella figura no era un triángulo de los de Euclides, pues al estar sobre una esfera no era plano. Yo le conteste entonces que en vez de bajar desde el polo al ecuador, bajara hasta un paralelo de latitud suficientemente alta para que el triángulo pareciera plano, al fin y al cabo muchos seres humanos han creído que la Tierra es plana, debido a que solo percibían una porción muy pequeña de ella. En ese caso tendría un triángulo casi plano (de los de Euclides) y la suma de sus ángulos sería 270 grados. Mi amigo acepto la construcción, entonces le comenté que nadie sabía resolver la aparente paradoja, y que lo único que podemos hacer es aceptar es que el postulado de Euclides no siempre es cierto.



USOS CLÁSICOS DE LA GEOMETRÍA

USOS MAS MODERNOS DE LA GEOMETRIA

