VIII feria
Madrid es Ciencia
12-15 de abril de 2007

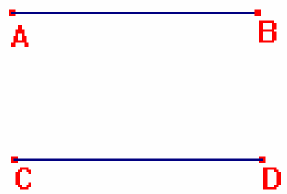
IES Barrio de Bilbao
Juguemos a la Geometría

TRAZADO DE CAMINOS: LUGARES GEOMÉTRICOS

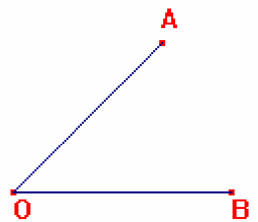
Hoy tenemos que diseñar sobre el mapa de nuestro jardín los caminos que se pueden seguir para que los árboles que tenemos plantados se vean con determinadas características. Utiliza el corcho, la hoja, los hilos, las chinchetas y los compases para intentar descubrir en cada caso cual es el camino adecuado.

1.- A la entrada del jardín tengo una par de cipreses que son exactamente iguales, y quiero que desde todos los puntos del camino que pase cerca de ellos, se aprecie que los dos son exactamente iguales.
Si los dos árboles se encuentran en los puntos A y B, que están unidos por el segmento AB, ¿Sabes decir que camino debemos trazar?

2.- En uno de los confines del jardín tengo dos hileras paralelas de pinos que son todos exactamente iguales. Me gustaría encontrar un camino que me permita desde cada uno de sus puntos ver que los árboles que se encuentran a la misma altura de las hileras son iguales. Si ambas hileras están representadas por los segmentos AB y CD, ¿Sabes indicar ahora el camino que tenemos que trazar?



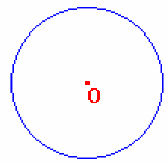
3.- En la linde con la propiedad de mi vecino tengo en mi jardín un precioso esquinazo. Para resaltar su belleza planté dos hileras chopos que son todos exactamente iguales formando un ángulo que cubre el esquinazo.



Me gustaría poder encontrar un camino que cumpla que desde cada uno de sus puntos permita ver que árboles que están a la misma distancia del vértice del esquinazo son iguales. Si el esquinazo esta representado por el ángulo AOB, ¿eres capaz de localizar el camino que debemos trazar?.

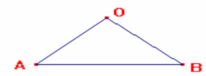
4.- En el centro de mi jardín, planté y creció un inmenso alcornoque. Me gusta tanto verlo cuando me parece desde donde me encuentro que tiene una altura de 3m, que me gustaría encontrar un camino a su alrededor que me permitiera rodearlo completamente y que desde todos su puntos vea que el alcornoque tiene esa altura. ¿Sabrías decir como tiene que ser el camino que tenemos que trazar?

5.- En otra zona del jardín planté a lo largo de una circunferencia un conjunto de robles, y para resaltar la figura, justo en el centro de la circunferencia planté otro. Con el paso del tiempo los árboles crecieron y me percaté de que eran todos exactamente iguales.
Quiero disponer de un camino que me permita desde todos sus puntos ver que el árbol del centro, y el árbol que veo que está en la línea recta que pasa por el centro y el punto en el que me encuentro son iguales.¿Cómo debe ser el camino?



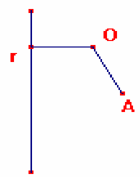
Una vez que le cogí el cariño a esto de trazar caminos me dí cuenta que lo que estaba era construyendo distintas figuras de la geometría plana. Entonces me planteé ver si era capaz de resolver las siguientes cuestiones,

6.- Dado en el plano un segmento AB, digo que desde un punto del plano O veo el segmento AB bajo ángulo recto cuando el ángulo OAB formado por los segmentos OA y OB es un ángulo recto. ¿Cuál es la curva de los puntos del plano que cumple que desde todos sus puntos se ve el segmento AB bajo ángulo recto?



Caso 6, ángulo AOB recto
Caso 7, AO + OB = d constante d>AB
Caso 10, AO – OB = d constante, d < AB

7.- Dados dos puntos A y B del plano y fijada una longitud “d” mayor que la distancia que separa a ambos puntos. ¿Cuál es la curva que cumple que la suma de distancias de cada uno de sus puntos a los dos puntos A y B es constante e igual a “d”?



Caso 8, d(O,r) = OA
Caso 9, OA/d(Or) = e <1 constante
Caso 11, OA/d(Or) = e >1 constante

8.- Dada en el plano una recta “r” y un punto A, ¿Cuál es la curva que cumple que cada uno de sus puntos dista del punto A lo mismo que de la recta “r”?.

9.- Dada en el plano una recta “r”, un punto A, y un número menor que la unidad “e”¿Cuál es la curva que cumple que cada uno de sus puntos la relación de distancias al punto A y a la recta “r” es precisamente el número “e”?.

10.- Dados dos puntos A y B del plano y fijada una longitud “d” menor que la distancia que separa a ambos puntos. ¿Cuál es la curva que cumple que la diferencia de las distancias de cada uno de sus puntos a los dos puntos A y B es constante e igual a “d”?

11.- Dada en el plano una recta “r”, un punto A, y un número mayor que la unidad “e”¿Cuál es la curva que cumple que cada uno de sus puntos la relación de distancias al punto A y a la recta “r” es precisamente el número “e”?.

12.- Dado en el plano una recta “r” y un punto A, se considera que en el punto A hay una fuente de luz. ¿Qué curva que rodea al punto A cumple que si es un espejo todos los rayos de luz que salen del punto A son reflejados en dirección perpendicular a la recta “r”?

13.- Dados dos puntos A y B del plano, se considera que en el punto A hay una fuente luminosa. ¿Qué curva que rodea a ambos puntos cumple que si es un espejo todos los rayos de luz que salen del punto A al ser reflejados son reunidos en el punto B.

14.- Se considera en el plano una circunferencia de centro el punto A, y dentro del círculo asociado se considera un punto B. Dado otro punto cualquiera P del círculo se construye la recta que pasa por él y por el punto B, y se considera uno cualquiera de los puntos C de intersección de esta recta con la circunferencia. ¿Qué curva que rodea a los puntos A y B tiene la propiedad de que cada uno de sus punto dista lo mismo del punto B y del punto C?.

15.- Un día caminando por la calle me encontré una escalera apoyada en la pared y en el suelo. La pared y el suelo eran entre sí perpendiculares. De pronto el apoyo de la escalera fallo y empezó a deslizarse de forma que su base se iba alejando de la pared pero siempre deslizando sobre el suelo, y su punto superior iba deslizando a lo largo de la pared. Me fijé en el punto medio de la escalera, e intenté imaginar la curva que describía ese punto mientras la escalera se deslizaba. ¿Cuál es la curva que tuve que imaginar?.

16.- Siguiendo con la situación anterior me fijé entonces en un punto de la escalera que distaba del punto de apoyo en el suelo un tercio de la longitud de la escalera. De nuevo intenté imaginar la curva que describía ese punto mientras la escalera se deslizaba. ¿Cuál es la curva que tuve que imaginar?.

Ahora vamos a imaginar unas curvas que son un poquito más complicadas, pero que tienen muchas aplicaciones en la tecnología mecánica.

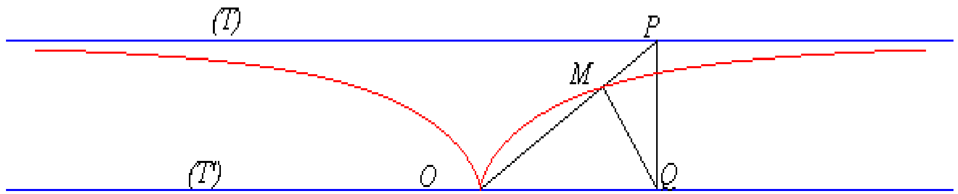
17.- Imagínate una recta sobre la que dejas rodar sin deslizar una circunferencia. Antes de que empiece a rodar, en el punto A que es el que está en contacto con el suelo pones una brocha de pintura de forma que conforme se produzca el movimiento la brocha ira dibujando una curva sobre el plano. ¿Te imaginas que curva va a dibujar la brocha?. A esta curva la llamamos cicloide.

18.- Imagínate ahora que tienes una circunferencia de radio 2R, y sobre ella rueda sin deslizar una circunferencia de radio R. Antes de que empiece a rodar, en el punto A que es el que está en contacto con la circunferencia base pones una brocha de pintura de forma que conforme se produzca el movimiento la brocha ira dibujando una curva sobre el plano. ¿Te imaginas que curva va a dibujar la brocha?. A esta curva la llamamos epicicloide. Tiene muchísimas aplicaciones a la hora de diseñar engranajes.

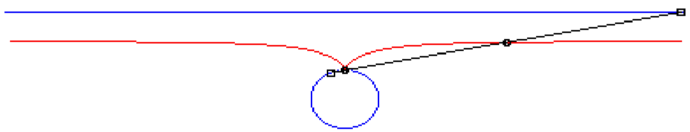
19.- Imagínate ahora que tienes una circunferencia de radio R, y apoyada en su cara interior rueda sin deslizar una circunferencia de radio R´, obviamente siendo R´< R. Antes de que empiece a rodar, en el punto A que es el que está en contacto con la circunferencia base pones una brocha de pintura de forma que conforme se produzca el movimiento la brocha ira dibujando una curva sobre el plano. ¿Te imaginas que curva va a dibujar la brocha?. A esta curva la llamamos hipocicloide. También tiene muchísimas aplicaciones a la hora de diseñar engranajes. Por cierto, hay un caso particular de la hipocicloide que se consigue cuando R´ es justamente la mitad de R. Imagínate como es. A esta curva tan curiosa la llamamos Astroide.

Finalmente te vamos a presentar algunas curvas generadas mecánicamente que son muy simples y muy curiosas, y a lo largo de la historia han tenido aplicaciones.

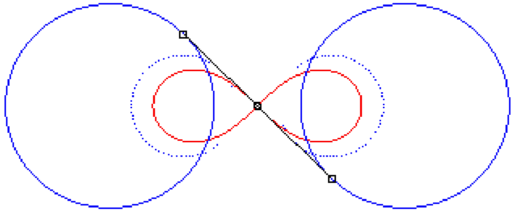
20. Imagínate dos rectas paralelas T y T’, y fija en T’ el punto O. Considera un punto P que recorre la recta T. Une el punto P con O. Traza la perpendicular a T por P que corta a T’ en Q. Finalmente traza la perpendicular al segmento OP por Q. Esta última recta corta al segmento OP en el punto M. La curva que describe M cuando el punto P recorre la recta T se llama Cisoide recta o Cisoide de Diocles.



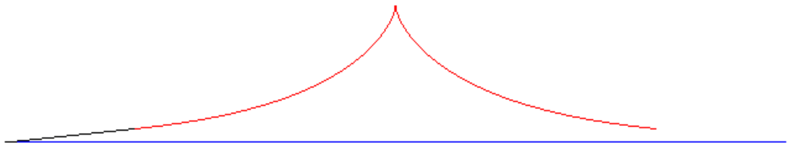
21.- Considera una circunferencia de radio R, y un punto O obre ella. Traza una paralela a la recta tangente a la circunferencia en el punto O que diste 2R del punto O. Ahora traza por O una recta cualquiera que cortará a la recta en un punto A, y a la circunferencia además de en O en otro punto B. Considera el punto medio del segmento AB, el punto M. Conforme vamos cambiando la recta trazada por O el punto M de nuevo describe una Cisoide recta o Cisoide de Diocles.



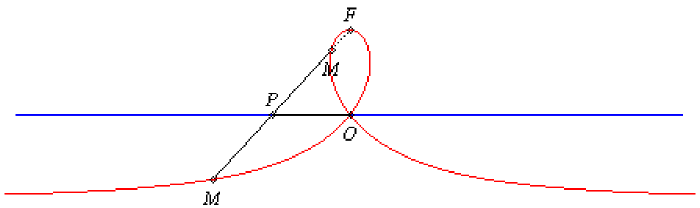
22.- Imagínate dos circunferencias de radio a/2, de centros respectivos dos puntos que distan más que a. Traza el punto medio del segmento que une los dos centros, y haz pasar por el una barra de longitud a de forma que cada uno de sus extremos se encuentre siempre sobre una de las circunferencias. Deja moverse los puntos sobre las circunferencias pero respetando siempre que haya un extremo de la barra en cada circunferencia, que la barra pase por el punto medio entre los centros. Fíjate la curva que describe el punto medio de la barra. Esta curva se conoce como Lemniscata de Bernouilli. Tiene aplicaciones a la hora de construir mecanismos para transmitir movimientos circulares.



23.- Considera una recta “r” en el plano. Considera un objeto que esta fuera de la recta. En el pie de la perpendicular a “r” que pasa por el objeto hay una persona que tiene una cuerda inextensible atada al objeto. La persona empieza a moverse describiendo la recta “r”, y a través de la cuerda el movimiento se transmite al objeto. Este se mueve de forma que la distancia a la persona sea constante, y que su velocidad apunte siempre hacia la persona. ¿Qué curva describe en su movimiento el objeto?. A esta curva la llamamos tractriz, o curva de persecución.

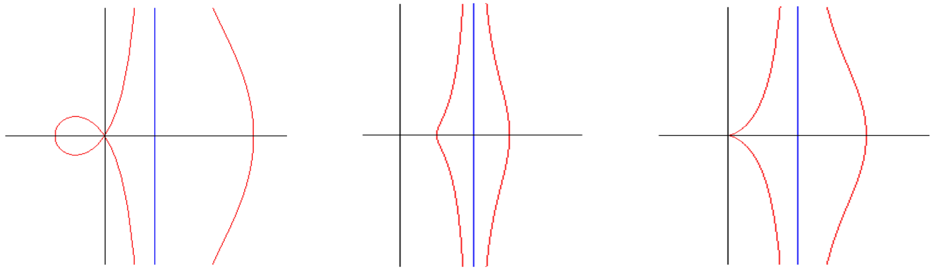


24.- Dado en el plano dos puntos O y F, traza por el punto O una recta perpendicular al segmento OF. Sea ésta la recta S. Considera ahora una recta variable D que pasa por F. Localiza sobre la recta D, para cada una de sus posiciones, el punto P, intersección de esta recta con la recta S, y el punto M que dista de P lo mismo que O dista de P, es decir de forma que PM sea igual en longitud a PO. Las posiciones que describe el punto M según va variando la recta D describen una curva que llamamos Estrofoide recta o de Newton-



PM = PO

25.- Considera una circunferencia de centro O y radio “a”, y una recta S que dista del centro de la circunferencia una distancia “b”. Traza por el centro de la circunferencia una recta D variable que cortará a la circunferencia en dos puntos A y B y a la recta S en un punto C. Encuentra dos nuevos puntos M y P que cumplen que M es el punto medio entre A y C, y P es el punto medio entre B y C. La curva descrita por los puntos M y P conforme vamos variando la recta D se llama Concoide de Nicomedes. Fíjate que la forma de la curva depende de la relación de distancias entre “a” y “b”.



b > a 0 < *a* < *b* *a* = *b*

Fíjate la cantidad de curvas que el ingenio humano ha ido imaginando y construyendo a lo largo de la historia. Si te interesa el tema puedes buscar muchas más en las enciclopedias. Te proponemos dos direcciones en la red donde pueden encontrar mucha información

www.mathcurve.com (en francés)
http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Curves/Curves.html(en inglés)

Intenta buscar información sobre que son y como se generan las siguientes curvas.

- Cisoide
- Estrofoide
- Conchoide
- Trisectriz de Mc Laurin
- Cuadratriz de Hipias
- Espiral de Arquímedes
- Espiral Logarítmica
- Folium
- Cardioide
- Catenaria
- Ovalo cartesiano
- Ovalo de cassini
- Clotoide

Para terminar, puesto que has llegado hasta aquí seguro que ya le has encontrado la belleza a la geometría. Para que practiques te proponemos unos cuantos problemas.

a) Demuestra que en un triángulo rectángulo la mediana asociada al vértice del ángulo recto mide lo mismo que la mitad de la hipotenusa.
b) Sabiendo cual es la longitud en un triángulo isósceles de la altura y de la unión de la base y de uno de los lados, dibújalo utilizando solo la regla y el compás.
c) Busca cual es la curva formada por todos los puntos del plano cuyas distancias a dos puntos fijos A y B están en una relación constante.
d) Intenta conocer que es la circunferencia focal, la circunferencia principal y la circunferencia de Mohr asociada a una elipse.
e) Intenta conocer que es la circunferencia focal asociada a una hipérbola.
f) Imagina que tienes una circunferencia y un punto O exterior a ella. Considera un punto P de la circunferencia y traza un segmento con origen en P de longitud fijada “d” sobre la recta que pasa por los puntos P y O. El otro extremo del segmento es el punto M. Imagina ahora que el punto P describe la circunferencia y que en todo momento el segmento dado sigue estando en la recta que pasa por O y por la posición de P. ¿Eres capaz de construir la curva que describe el punto M?.
g) Imagínate que en lo alto de dos postes verticales de alturas respectivas “a” y “b” se encuentran dos pájaros que vuelan siempre a la misma velocidad. En que punto del suelo entre las bases de los postes debo situar un reclamo para que los dos pájaros empezando a volar a la vez lleguen al reclamo al mismo tiempo. Resuélvelo usando sólo la regla y el compás.
h) Tengo en el plano dos puntos A y B que son los vértices de dos ángulos agudos iguales que tienen sus aberturas enfrentadas y uno de los lados está sobre la misma recta soporte. Localiza usando la regla y el compás un punto del plano que equidiste de los lados de los dos ángulos.
i) Imagina que tienes una circunferencia y un punto O exterior a ella. Considera un punto P de la circunferencia y traza un segmento con origen en P de longitud fijada “d” sobre la recta que pasa por los puntos P y O. El otro extremo del segmento es el punto M. Imagina ahora que el punto P describe la circunferencia y que en todo momento el segmento dado sigue estando en la recta que pasa por O y por la posición de P. ¿Eres capaz de construir la curva que describe el punto medio entre P y M?.
j) Imagina que tienes una circunferencia de centro O y radio R, y una recta “r” que pasa por su centro. Considera un segmento de longitud fija e igual al radio de la circunferencia R. Fija uno de sus extremos, el P, en un punto de la circunferencia, y el otro, el M, sobre la recta. Imagina que el punto P empieza a moverse sobre la circunferencia, y que el punto M esta obligado a moverse a lo largo de la recta, de forma que en todo momento la distancia entre P y M es R. Para cada posición del segmento PM traza por P la recta “t” que pasa por él y por O, y por M traza una recta “s” que pasa por él y es perpendicular a “r”. Sea F el punto de corte de la recta “t” y la recta “s”. ¿Puedes imaginar la curva que describe el punto F conforme el punto P describe la circunferencia?. ¿Y la que describe el punto H, punto medio del segmento PM, conforme el punto P describe la circunferencia?. Fíjate que el mecanismo biela-manivela que une los pistones y el cigüeñal de cualquier motor de coche se basa en esta construcción.
k) Imagina en el plano una recta r y un punto exterior a ella O. Traza por el punto O una recta s que corte a r en P. Localiza sobre la recta s un punto M que diste de O la mitad de lo que diste P. ¿Cuántos hay?. ¿Qué figura describe el punto M conforme el punto P se va deslizando sobre la recta r de forma que va cambiando la recta s?
l) Considera en el plano dos rectas r y s que se cortan en el punto O. Dibuja una circunferencia que sea tangente a r y a s y cuyo centro diste de 0 una distancia d. ¿Cuántas hay?.
m) Considera en el plano dos rectas r y s que se cortan en el punto O. Dibuja una circunferencia que sea tangente a r y a s y que pase por un punto P dado. ¿Cuántas soluciones hay? ¿Hay solución siempre, esté donde esté el punto P?.
n) Imagínate que en lo alto de dos postes verticales de alturas respectivas “a” y “b” se encuentran dos pájaros que vuelan siempre a velocidades “p” y “q” respectivamente. En que punto del suelo entre las bases de los postes debo situar un reclamo para que los dos pájaros empezando a volar a la vez lleguen al reclamo al mismo tiempo. ¿Hay solución siempre?. Resuélvelo usando sólo la regla y el compás (Lugar geométrico de puntos con razón de distancias a dos puntos dados constante).
o) De una elipse se conoce el valor de la longitud del eje mayor, un foco, un punto y la recta tangente en él. Se pide determinar la elipse.
p) De una elipse se conoce el valor de la longitud del eje mayor, un foco, un punto y una recta tangente (no asociada a dicho punto). Se pide determinar la elipse.
q) De una parábola conocemos la recta de su eje, un punto, y la recta tangente en dicho punto. Se pide determinar la parábola.