

VIII feria
 Madrid es Ciencia
 12-15 de abril de 2007

IES Barrio de Bilbao
 Juguemos a la Geometría

Temas de geometría

La Divina Proporción: el Número Áureo

(Basado en un texto y figuras de Mark Freitag)

EL NÚMERO ÁUREO

Casi todo el mundo conoce el número irracional π , la relación entre la longitud y el diámetro de una circunferencia. Existe otro número irracional no tan conocido al que llamamos Φ , el número áureo, que aparece frecuentemente en la naturaleza y en las construcciones humanas.

Una forma de encontrar Φ , es considerar las raíces de la ecuación,

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad \Phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$$

Se considera que Φ es la primera raíz. Se puede obtener Φ también con las siguientes expresiones recursivas infinitas:

$$\phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}$$

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

Utilizando estas expresiones podemos calcular el valor de Φ con una aproximación que dependerá de la cantidad de términos utilizados. A mayor número de términos mayor aproximación. Se puede mostrar que estas expresiones recursivas se aproximan tanto como deseemos al valor exacto de Φ . Si asumimos que X es el valor de la expresión recursiva infinita,

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

Al elevar al cuadrado ambos términos se obtiene,

$$x^2 - 1 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}}$$

Observe que el segundo miembro de la igualdad debe ser el número X, pues no vemos ninguna diferencia entre este segundo miembro y la definición de X. Por lo que se puede escribir,

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Que de nuevo es la ecuación de la que se obtuvo Φ .

Un proceso similar justifica la otra expresión recursiva. Sea X el valor de la expresión recursiva infinita,

$$x = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Entonces, de nuevo dado el carácter recursivo infinito del denominador de la primera fracción se puede ver de nuevo ahí la definición del número X, luego,

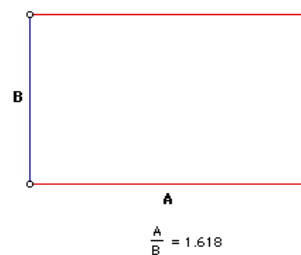
$$x = 1 + \frac{1}{x}$$

Por lo que se puede escribir,

$$x^2 - x - 1 = 0$$

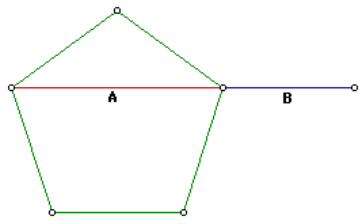
De nuevo la ecuación de la que se obtuvo Φ .

FIGURAS CON DIMENSIONES EN PROPORCIÓN ÁUREA

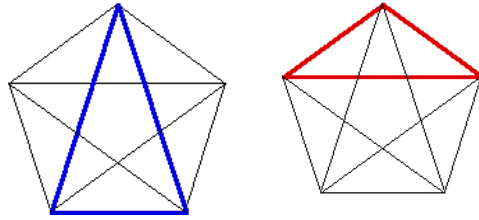


Una forma geométrica asociada al número áureo, es el rectángulo áureo. Este rectángulo tiene lados A y B, cuya relación coincide con el número áureo. Se dice que este rectángulo es el más agradable a la vista, de hecho se dice que cualquier figura geométrica que siga la proporción áurea es agradable a la vista.

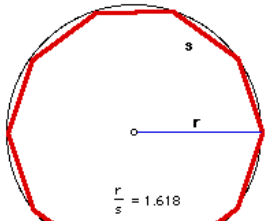
Se puede utilizar la proporción áurea para dibujar un pentágono regular, pues ya en la escuela pitagórica, descubrieron que el lado y la diagonal de este polígono están en proporción áurea. De hecho utilizaron la siguiente figura recursiva como emblema de la escuela, su petagrama.



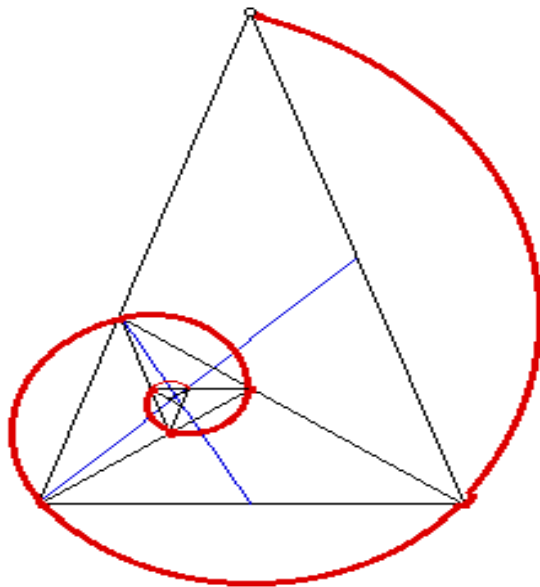
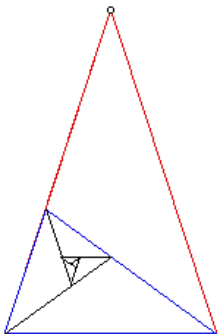
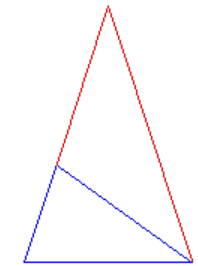
Si se unen los vértices del pentágono, se obtienen dos triángulos áureos. El triángulo azul tiene los lados y la base en relación áurea, y el rojo tiene la base en relación áurea respecto a cada uno de los lados.



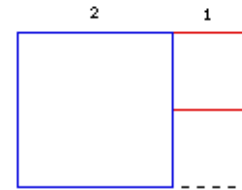
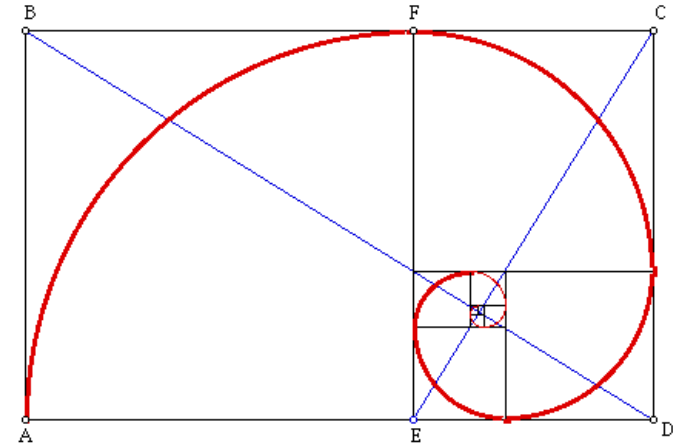
Si se inscribe un decágono regular en un círculo, la relación de uno de los lados al radio coincide con la sección áurea.



Si se toma un triángulo isósceles cuyos lados estén en relación áurea, los ángulos de la base serán de 72 grados. Si se biseca uno de estos ángulos se obtiene otro triángulo semejante. Si se continúa el proceso se obtiene un conjunto de triángulos arremolinados. Utilizando como base los triángulos arremolinados, se puede dibujar una espiral logarítmica, con convergencia en la intersección de las líneas azules.

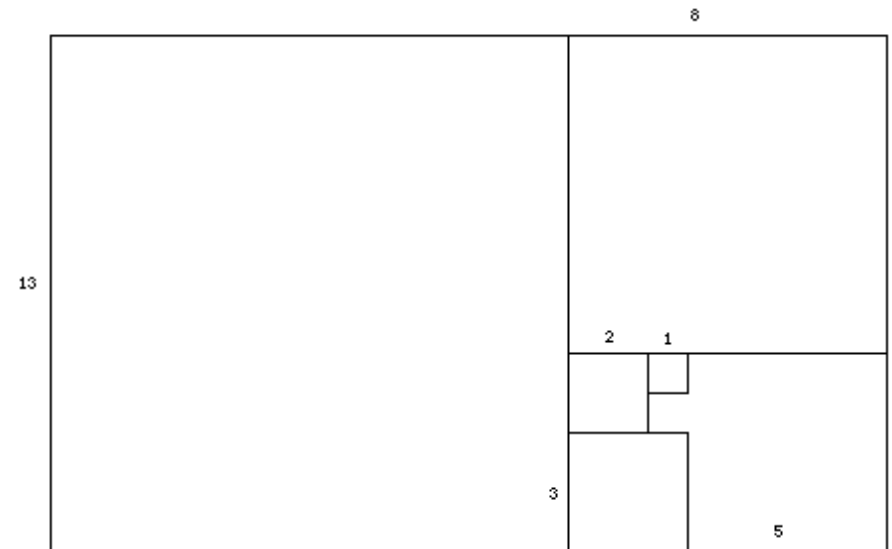


Se puede hacer lo mismo con el rectángulo áureo, generando un conjunto de rectángulos arremolinados, que sirvan de base para una espiral logarítmica, como se ven en la figura:



Es interesante observar la sucesión de rectángulos que se obtienen a partir de un cuadrado de lado 1 y uno de lado 2, al ponerlos juntos como indica la figura. Si se continúa dibujando cuadrados, tal y como indica la figura, se obtiene de nuevo el conjunto de rectángulos arremolinados.

La colección de rectángulos tienen la siguiente propiedad: La relación de los lados, se va acercando tanto como se desee a la sección áurea, ($2/1 = 2$, $3/2 = 1.5$, $5/3 = 1.6666$, $8/5 = 1.6$, $13/8 = 1.625$, y así).



LA SECCIÓN ÁUREA

La primera definición precisa de la proporción áurea la realizó alrededor del año 300 a.c. Euclides de Alejandría. Definió la proporción derivada de la simple división de una línea en su “media y extrema razón”,

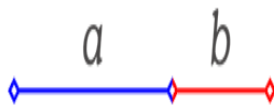
“Dado un segmento AB de longitud l se dice que un punto M lo divide en media y extrema razón cuando el segmento total es a la parte mayor como la mayor es la menor “

Si se intenta obtener la relación a/b, en base a la relación anterior y siendo $x = a/b$ es

$$x^2 - x - 1 = 0$$

Y resuelta esta ecuación de segundo grado, obtenemos para la relación a/b los valores indicados, donde Φ es el número áureo. Observa que Φ_1 es el opuesto del inverso de Φ .

$$\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$



$$\Phi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$$

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})$$

LA SUCESIÓN DE FIBONACCI

En el s.XII Leonardo Fibonacci (1170-1240) en su libro “Liber Abaci” planteó el siguiente problema, “Un hombre encerró una pareja de conejos en un lugar rodeado de un muro por todas partes.



¿Cuántos pares de conejos pueden producirse a partir del par original durante un año si consideramos que cada pareja engendra al mes un nuevo par de conejos que se convierten en productivos al segundo mes de vida?”

Observa que el número de pares productivos sigue la sucesión : 1, 1, 2, 3, 5, 8, ...

El número de pares no productivos sigue la misma secuencia empezando por cero: 0, 1, 1, 2, 3, 5, En el siglo XIX el matemático francés Edouard Lucas llamó a esta sucesión de números, donde cada número es la suma de los dos anteriores ($a_{n-2} + a_{n-1} = a_n$), sucesión de Fibonacci.

Si se forman las razones de términos consecutivos $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ de la sucesión de Fibonacci, se obtiene una sucesión de razones: $\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \dots$ que se aproximan tanto como se desee al número Φ .

En general, si se parte de dos números a y b, que se encuentren en proporción áurea y se construye la siguiente sucesión,

$$a; b; a+b; a+2b; 2a+3b; \dots$$

se cumple que términos consecutivos están en proporción áurea. Así si b/a es el número Φ :

$$a:b = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

Es:

$$b:(a+b) = 1:(a/b+1) = 1:\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$$

y racionalizando la expresión resulta:

$$b:(a+b) = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

En general como es,

$$a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$$

se cumple,

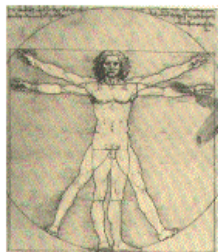
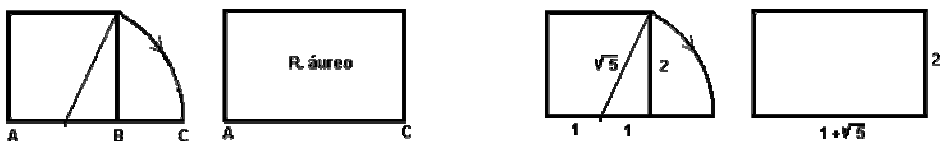
$$a_n:a_{n+1} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LA ARTES

A lo largo del tiempo todos los artistas han buscado una forma de división de las cosas perfectas pero no había nada que indicase en que proporción debían estar las cosas (seres vivos, objetos...).

Cuando Lucca Pacioli escribió La Divina Proporción, lo que hizo fue partiendo de una unidad arbitraria permitir la construcción de proporcionalidades tanto de múltiplos como de submúltiplos. Esta relación se conoce como sección áurea. Su expresión matemática es $a:b = b:a+b$. Vitruvio ideó un sistema de cálculo matemático de la división pictórica, para seccionar los espacios en partes iguales y así conseguir una mejor composición. Se basa en el principio general de contemplar un espacio rectangular dividido, a grandes rasgos, en terceras partes, tanto vertical como

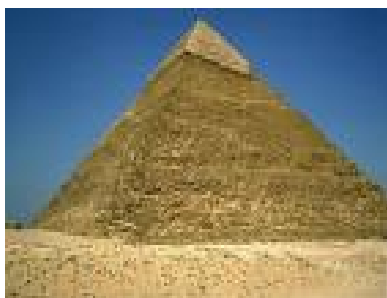
horizontalmente. O, explicado de otra forma, bisecando un cuadro y usando la diagonal de una de sus mitades como radio para ampliar las dimensiones del cuadrado hasta convertirlo en "rectángulo áureo". Al situar los elementos primordiales de diseño en una de estas líneas, se cobra conciencia del equilibrio creado entre estos elementos y el resto del diseño.



En "el hombre ideal" de Leonardo, el cociente entre el lado del cuadrado y el radio de la circunferencia que tiene por centro el ombligo, es el número de oro.



Los egipcios ya conocían esta proporción y la usaron en la arquitectura de la pirámide de Keops (2600 años a.C.). Los Egipcios descubrieron la proporción áurea por análisis y observación, buscando medidas que les permitiera dividir la tierra de manera exacta., a partir del hombre, utilizando la mano, el brazo, hasta encontrar que media lo mismo de alto que de ancho con los brazos extendidos y encontraron que el ombligo establecía el punto de división en su altura y esta misma ,se lograba de manera exacta, rebatiendo sobre las bases de un cuadrado, una diagonal trazada de la mitad de la base a una de sus aristas. La proporción áurea, paso de Egipto a Grecia y de allí a Roma. Las más bellas esculturas y construcciones arquitectónicas están basadas en dichos cánones.



LA PROPORCIÓN ÁUREA EN LA NATURALEZA

También la proporción áurea a través de la sucesión de Fibonacci aparece en la naturaleza.

Las escamas de una piña aparecen en espiral alrededor del vértice. Si contamos el número de espirales de una piña, encontraremos que siempre es igual a uno de los números de la sucesión de Fibonacci. Y lo más sorprendente, es que en la piña se pueden identificar espirales levóginas, que se enrollan hacia la izquierda, y espirales dextróginas, que se enrollan hacia la derecha. El número de espirales de cada tipo son siempre dos números consecutivos de la sucesión de Fibonacci. Igual sucede con la distribución de las pipas en el girasol y con el número de hojas que salen del tallo de las plantas en cada vuelta. Todos ellos son números de Fibonacci.



Hay una gran cantidad de animales con concha construida en espiral. En muchos de ellos, como el nautilus, el número de estrías radiales que aparecen en cada vuelta de la espiral es un número de la sucesión de Fibonacci. Todo parece indicar que si el crecimiento radial es proporcional al tamaño, y debe acompañarse con el crecimiento angular, la espiral debe ser la espiral áurea, que es equiangular, es decir, la recta tangente forma siempre el mismo ángulo con la línea radial, luego el crecimiento es proporcional al tamaño.

