



*Antonio Sánchez Gómez  
Roberto Palacín García  
Daniel Guerra Bernardo  
Francisco Sotres Díaz (Coordinador)  
IES Gregorio Marañón, Madrid*

# ÍNDICE

	Página
0.- Sumario	
1.- El Marco Teórico	
1.1.- Teorema de Bernoulli	2
1.2.- Tiro Horizontal	3
1.3.- Ley de la Continuidad	3
1.4.- Teorema de Torricelli	3
1.5.- Revisión de los tópicos. Las velocidades que aparecen	5
2.- La Investigación I : Relación entre velocidades de salida de una vena líquida por un orificio de un depósito medidas por tres métodos	
2.1.- Los objetivos	7
2.2.- La primera fase: Las distintas velocidades de salida	
2.2.1.- Diseño, documentación previa, hipótesis de partida	7
2.2.2.- Los materiales	8
2.2.3.- Montaje y procedimientos para el cálculo de velocidad real	10
2.2.4.- Las velocidades según Torricelli	12
2.3.- La segunda fase: ¿es constante la velocidad del chorro a la salida?	
2.3.1.- Diseño, documentación previa, hipótesis de partida	14
2.3.2.- Materiales, montaje y procedimientos	15
2.3.3.- Las conclusiones	18
3.- La Investigación II : El Tubo de Mariotte	
3.1.1.- Los fundamentos	19
3.1.2.- Materiales y montajes	20
3.1.3.- Los resultados	20
4.- La Investigación III : Los flujos laminar y turbulento	
4.1.- Los fundamentos teóricos	21
4.2.- Materiales, montajes y procedimientos	22
4.3.- Los resultados	22
5.- Las cuestiones propuestas	23
6.- La bibliografía	26
7.- Material de apoyo	26

## PRUEBA DE FÍSICA:

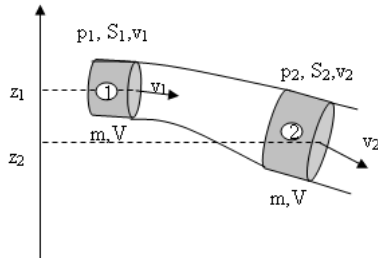
### ANÁLISIS DE LA VELOCIDAD DE ESCAPE DE UN LÍQUIDO EN DISTINTAS SITUACIONES

#### Sumario

El informe presenta varios aspectos experimentales del teorema de Bernoulli aplicados a una vena líquida como son el cálculo de las velocidades reales y teóricas de una vena líquida que sale por un orificio como consecuencia de las diferencias de presión entre la superficie del depósito y la cota del orificio y su representación en una recta de regresión lineal. Para los cálculos de distancias y tiempos de modo muy preciso nos hemos ayudado de un software creado por una Academia Pedagógica de la Universidad de Rennes. Añadimos la comprobación del tubo de Mariotte, un clásico muy espectacular de difícil explicación. Hay además una pequeña investigación original con resultados poco (o nada) conocidos acerca de la trayectoria horizontal de la vena líquida a su salida del orificio. Finalmente intentamos sin mucho éxito obtener los flujos laminar y turbulento a la salida del líquido en función de la velocidad y responder con más fortuna al cuestionario propuesto por el comité organizador de la EUSO en nuestro país.

# 1.-MARCO TEÓRICO:

## 1.1.-Teorema de Bernoulli:



El Teorema de Bernoulli es el principal teorema de la Hidrodinámica de la dinámica de fluidos, presentado por él en su obra Hidrodinámica. A partir del trabajo realizado sobre una porción de líquido incompresible que viaja por distintas secciones con distinta velocidad, el trabajo externo se comunica al fluido en forma de energías cinética y potencial. Relaciona la altura del fluido, su presión y su velocidad de manera que su conjunto sea constante. Un cálculo sencillo nos lleva a la fórmula de conservación:

$$\frac{V_1^2 \cdot d}{2} + P_1 + d \cdot g \cdot h_1 = \frac{V_2^2 \cdot d}{2} + P_2 + d \cdot g \cdot h_2$$

Donde “V” es la velocidad, “d” la densidad, “P” la presión, “g” la aceleración de la gravedad y “h” la altura.

Destacamos por tanto la constancia de la expresión

$$\frac{V^2 \cdot d}{2} + P + d \cdot g \cdot h = K$$

a lo largo de toda la vena

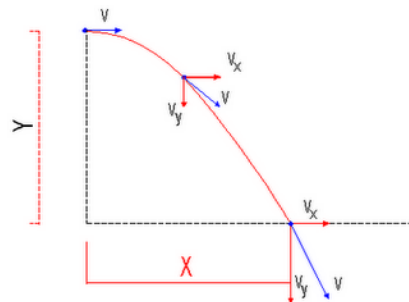
## 1.2.-Tiro parabólico horizontal:

Desde la época renacentista, a partir de los estudios del matemático Tartaglia, es conocido que la trayectoria de un proyectil al que se le imprime un ímpetu horizontal, impacta en un punto del suelo situado a una distancia “x” de la base desde una altura “y”. Unos cálculos elementales dan las expresiones:

$$y = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}}$$

$$x = v_x t \Rightarrow v_x = v = \frac{x}{t} = cte.$$

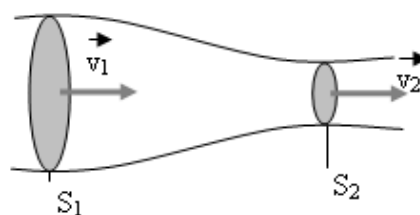
De lo que se implica que conocidos los distintos alcances horizontales, sería posible calcular la velocidad de salida en el orificio, objetivo de nuestra investigación



La aplicación de este estudio a una partícula puntual en el caso de un chorro líquido, no es tan trivial como parece para un sistema casi continuo (un análisis con luz estroboscópica muestra que un chorro está compuesto por gotas individuales en gran parte).

### 1.3.-Ley de la Continuidad:

La Ley de la Continuidad no es más que la ley de la conservación de la masa aplicada a los fluidos (supuestos incompresibles). Expresa la igualdad de los caudales en los puntos 1 y 2,  $Q_1 = Q_2 \Rightarrow S_1 \cdot V_1 = S_2 \cdot V_2$ , donde “Q” es el caudal, “S” la sección y “V” la velocidad.



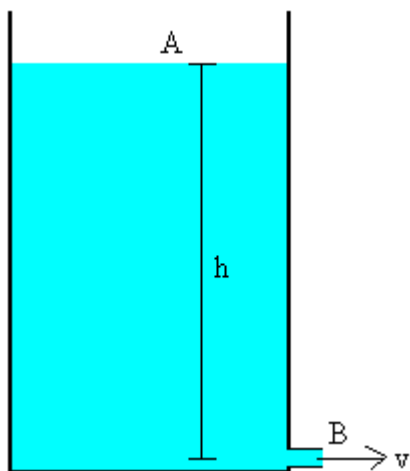
### 1.4.-Teorema de Torricelli:

El Teorema de Torricelli es una aproximación de Bernoulli al caso de un recipiente con una superficie externa lo suficientemente extensa para suponer despreciable la velocidad de descenso de su nivel. Relaciona la velocidad de caída y la altura del orificio de salida. Su expresión matemática es:

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h.$$

Veamos su deducción:

A partir del Teorema de Bernoulli, de la constancia de las cargas de presión entre dos puntos del mismo fluido, si en el dibujo de la izquierda aceptamos que la presión en A y en B es igual a la atmosférica, que la diferencia de altura entre A y B es h, que corresponde con la altura de la columna de agua, y que la velocidad de A sea despreciable en comparación con la de B, deducimos el siguiente desarrollo:

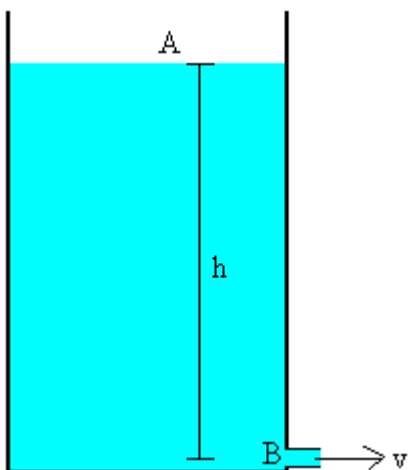


$$\begin{aligned} \frac{V_A^2 \cdot d}{2} + P_A + d \cdot g \cdot h_A &= \frac{V_B^2 \cdot d}{2} + P_B + d \cdot g \cdot h_B \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{V_A^2 \cdot d}{2} + P_A + d \cdot g \cdot (h_A - h_B) &= \frac{V_B^2 \cdot d}{2} + P_B \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{V_A^2 \cdot d}{2} + P_A + d \cdot g \cdot h &= \frac{V_B^2 \cdot d}{2} + P_B \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{V_A^2 \cdot d}{2} + P_A - P_B + d \cdot g \cdot h &= \frac{V_B^2 \cdot d}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{2}{d} \cdot \frac{V_A^2 \cdot d}{2} + \frac{2}{d} \cdot (P_A - P_B) + \frac{2}{d} \cdot d \cdot g \cdot h &= \frac{2}{d} \cdot \frac{V_B^2 \cdot d}{2} \Rightarrow \\ \Rightarrow V_B^2 &= V_A^2 + \frac{2 \cdot (P_A - P_B)}{d} + 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow \\ \Rightarrow V_B^2 &= V_A^2 + 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow V_B^2 = 2 \cdot g \cdot h \end{aligned}$$

En definitiva, a medida que descienda el punto A (o la altura, y con ella la presión, de la columna de agua), la velocidad de salida en B se reducirá en la misma proporción. Se observa, al menos en teoría, que la velocidad de salida sólo depende de la diferencia de alturas entre la superficie y el orificio. En la realidad, en algunos casos hay que tener en cuenta las progresivas pérdidas de carga debidas a los rozamientos en el agujero según disminuye su sección, y a la contracción de la vena líquida. De hecho, un grifo que se cierra progresivamente, disminuye tanto el caudal como la velocidad de salida del líquido.

Considerando la variación del diámetro del orificio obtenemos un resultado poco conocido:

La ecuación que relaciona el diámetro con la velocidad no es más que otro derivado de la Ecuación de Bernoulli. Vamos a comprobar como llegar a ella en el supuesto de que la velocidad de bajada del nivel no sea despreciable. Partiremos de la ecuación  $V_B^2 = V_A^2 + 2 \cdot g \cdot h$ , procedente del apartado de Torricelli. A partir de aquí y combinándola con la Ley de la Continuidad sustituimos la  $V_A$ :



$$S_A \cdot V_A = S_B \cdot V_B \Rightarrow V_A = \frac{S_B \cdot V_B}{S_A} = \frac{R_B^2 \cdot \pi \cdot V_B}{R_A^2 \cdot \pi} = \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^2 \cdot V_B$$

$$V_B^2 = V_A^2 + 2 \cdot g \cdot h \xrightarrow{\text{Sustitui mos}} V_B^2 = \left[\left(\frac{R_B}{R_A}\right)^2 \cdot V_B\right]^2 + 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_B^2 - V_B^2 \cdot \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^4 = 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow V_B^2 \cdot \left[1 - \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^4\right] = 2 \cdot g \cdot h \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_B^2 = \frac{2 \cdot g \cdot h}{1 - \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^4}$$

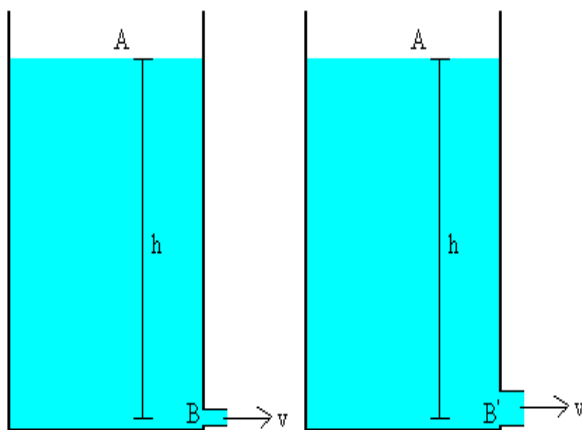
Si ahora comparamos las velocidades de salida de dos depósitos iguales, pero con distinta sección de salida y observamos si el resultado es mayor, o menor, que la unidad:

$$\frac{V_B^2}{V_{B'}^2} = \frac{2 \cdot g \cdot h}{1 - \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^4} : \frac{2 \cdot g \cdot h}{1 - \left(\frac{R_{B'}}{R_A}\right)^4} = \frac{1 - \left(\frac{R_{B'}}{R_A}\right)^4}{1 - \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^4} \Rightarrow$$

$$\rightarrow R_{B'} > R_B \Rightarrow \left(\frac{R_{B'}}{R_A}\right)^4 > \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[1 - \left(\frac{R_{B'}}{R_A}\right)^4\right] < \left[1 - \left(\frac{R_B}{R_A}\right)^4\right] \rightarrow \frac{V_B^2}{V_{B'}^2} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_B^2 < V_{B'}^2$$



Así pues, es inmediata la conclusión que cuanto mayor sea el diámetro en B mayor será la velocidad de salida.

### 1.5.-Los tópicos de las velocidades de salida implicadas en la experiencia

Como vemos, el tema es bastante más complicado de lo que aparece en los textos de los primeros cursos universitarios.

- De una parte, la aproximación de Torricelli que hace depender la velocidad de salida sólo del desnivel del líquido no es muy fina, pues hemos visto que los cálculos nos dan que a mayor diámetro, mayor velocidad. La experiencia con una botella de agua y dos orificios de distinta sección a la misma cota, nos confirmó esta previsión. La simplificación sería por tanto:

$$v = \sqrt{2g\Delta h}$$

- De otra, nos viene la duda de si las pérdidas y la contracción de la vena líquida antes de la salida del conducto mantienen esta velocidad. Algunos libros hablan de que ésta se reduce hasta en un 35 %. La forma de averiguarlo es calcular la velocidad real midiendo caudal y sección, y comparar con los valores de Torricelli. Si  $Q$  es el caudal en ml/s, lo convertiremos después a m<sup>3</sup>/s

$$Q = \frac{Vol}{t}$$

Donde  $Vol$  es el volumen del líquido en ml recogido en una probeta en un tiempo dado  $t$  en s. Además, si  $S$  es la sección del tubo de salida, y  $v$  la velocidad,

$$v = \frac{Q}{S}$$

- Finalmente, una vez que el chorro ha salido, no tenemos muy claro que sucederá. Era de suponer que al ser un tiro parabólico, los rozamientos afectarán también al chorro en su caída al suelo, luego el alcance horizontal real debería ser menor, que el calculado a partir de la velocidad horizontal (la velocidad media real de todas las partículas de la vena de salida) que nos dio la medida del caudal y del tiempo de caída libre de un objeto que cayera desde la misma altura del chorro.

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

Por otro lado el chorro de salida está formado por capas concéntricas que viajan con un gradiente de velocidad decreciente desde el centro debido a la viscosidad, y a lo mejor las partículas interiores arrastran a las externas consiguiendo un chorro estrecho y más rápido de lo esperado. También, la tensión superficial del agua contribuye a cerrar la vena... Como hemos dicho, a partir de una cierta distancia el chorro se disgrega en gran parte en gotas individuales. No hemos encontrado bibliografía al respecto, por lo que nos pareció un tema apasionante a contrastar con la experiencia y un diseño adecuado.

## 2.-LA INVESTIGACIÓN I

### 2.1.-Objetivos:

- a) Relación entre la velocidad de salida de un líquido por un orificio de una garrafa y su altura respecto al nivel del líquido.

$$v^2-h$$

- b) Tabular datos en una hoja de cálculo.

- c) Representar gráficamente la relación con un ajuste lineal ( recta de regresión) e interpretar los coeficientes de la recta.

### 2.2.-LA PRIMERA FASE

¿COINCIDE LA VELOCIDAD REAL DE SALIDA CON LA VELOCIDAD DADA POR TORICELLI?

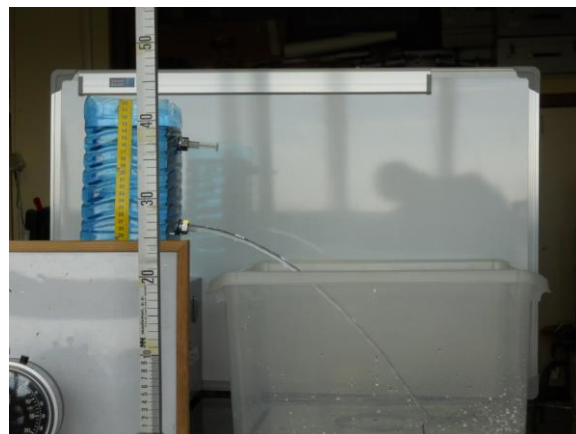
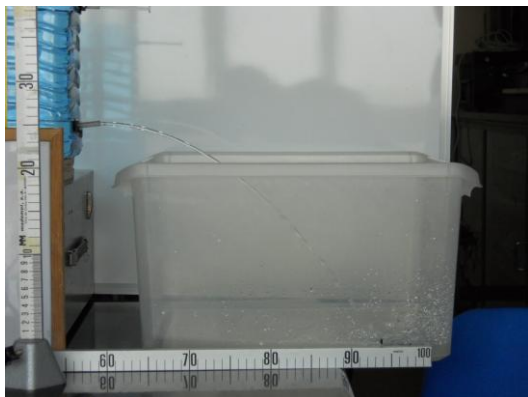
#### 2.2.1.- Diseño, estudio de literatura e hipótesis de partida de la investigación:

Vamos a analizar y comparar los resultados de las velocidades de salida dadas por Torricelli con las calculadas a partir de los caudales que salen por el orificio de una sección dada. Tras un análisis de textos universitarios (Tipler, Sears, Schaum, Weistphall,...) de los primeros cursos, supimos que la velocidad real disminuye hasta un 55- 65 % respecto del valor de Torricelli. Nuestra hipótesis era que con lo grosero de nuestro material, sería difícil obtener medidas homologables y generalizaciones.

El tema de las medidas era fundamental en nuestra experiencia. Decidimos registrar los datos en un cuaderno de laboratorio y además con un software (AVIMECA) que en nuestra opinión ha supuesto un antes y un después en la docencia de la Física no universitaria. Es software libre descargado de la Académie Pédagogique de Rennes. Permite inmovilizar las imágenes a intervalos de 0,055 s y medir distancias entre puntos de imágenes de películas, dibujar posiciones del puntero móvil en los puntos que nos interesen, y medir por tanto velocidades casi instantáneas entre dos instantes. Otro software bastante más modesto, “On screen Ruler” mide distancias entre puntos de fotografías digitales y los convierte a reales mediante el factor de conversión adecuado.

**El primer diseño** viene expresado en la figura adjunta: el chorro obtenido para distintas alturas y presiones se recoge en una cubeta. Un par de reglas a escuadra y

un software adecuado (“On line Screen”) permiten medir con precisión las distancias verticales y horizontales (alcances). Hicimos varias fotos y grabaciones con distintas secciones y a distintas alturas. Un análisis más crítico, nos hizo dudar sobre si la velocidad obtenida a partir de los cálculos con el tiro parabólico, sería la real.



Atendiendo a la teoría anteriormente mencionada, esperamos que en las primeras mediciones el alcance horizontal correspondiente al orificio superior (el de menor altura de presión) sea menor que las dos inferiores, y que dentro de estas, la menor longitud corresponda a la abertura más ancha. Obviamente las distancias irán disminuyendo proporcionalmente a la altura del agua.

Tras cuatro sesiones de montajes y grabaciones, ante las dudas expresadas, decidimos optimizar el diseño progresivamente, aunque los materiales obtenidos nos pudieran servir al final para contraste.

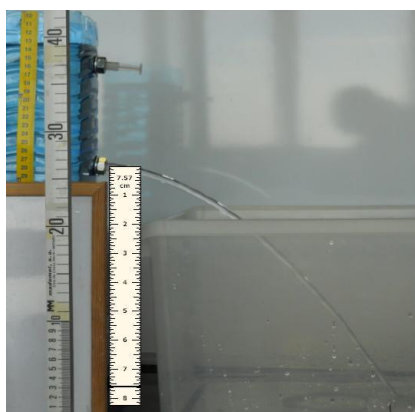
La nueva opción sería medir los caudales de salida por el tubo ancho (diámetro 8 mm) y a partir de ahí, calcular las distintas velocidades de salida, expresarlas en una hoja Excel y después comparar los resultados.

### 2.2.2.-Los materiales

Sabíamos que lo ideal sería disponer de recipientes de unos 50 l de capacidad, pero pensamos que nos serían suficientes las clásicas garrafas de agua de 5 l para no encarecer el proyecto. Nos arrepentimos mucho de no haberlo hecho en su momento. Desde el objetivo de que los materiales no fueran gravosos para el centro, elegimos los siguientes:

- Cuba de plástico de 20 l
- Garrafas de agua de 5 l (2) .A cada garrafa le cortaremos la parte superior para asegurar que la presión sea homogénea en toda la superficie y que podamos aproximar que la velocidad de descenso de la superficie libre fuera despreciable frente a la del orificio.
- Jeringuillas de insulina (2) e intramusculares (2) de 3 y 5 ml, a modo de grifos, pegadas y enroscadas para conseguir un cierre hermético. Los mismos émbolos de las jeringuillas hacían de tapones.

- Tuercas, juntas de goma , terrajas, pegamentos “Super-glue” y “Araldite”
- Reglas metálicas graduadas, calibre, cinta métrica
- Cronómetro
- Máquinas de fotos y video digitales con trípode
- Probeta de 100 ml
- Vaso de precipitados de 500 ml
- Software “Avimeca 2.6 “
- Software “ On screen ruler” . Sólo es una regla virtual que podemos colocar en cualquier punto de la pantalla y medir distancias horizontales o verticales. El factor de conversión correspondiente nos dará las distancias reales.
- Colorante ( amarillo) orgánico para paella.
- Azul de metileno
- Calibre



### 2.2.3.-Montaje y procedimientos para el cálculo de la velocidad real

Previo a la experiencia hubimos de preparar las garrafas con orificios de distinta sección. Fue una labor difícil la de fijar unas jeringas: tuvimos que roscar el plástico con una terraja, acoplar una tuerca por la parte interna y otra por la externa de la garrafa. A continuación unas juntas de goma y pegamento consiguieron una buena impermeabilización.

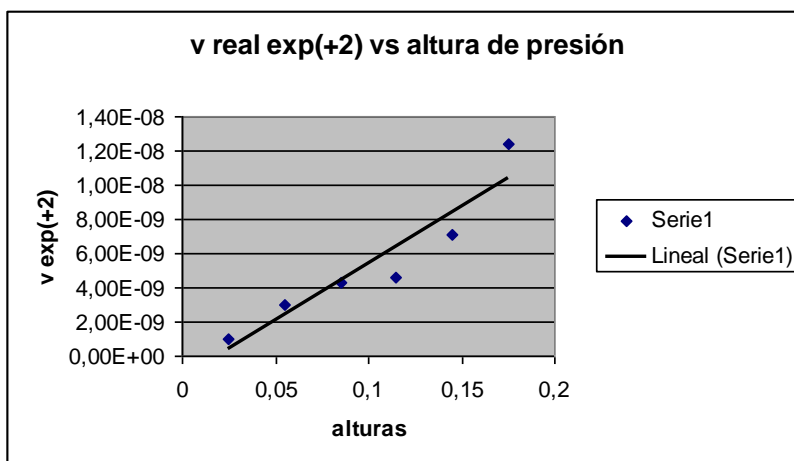
Tras mojar constantemente el suelo del laboratorio, y luchar con el problema de los paralajes para las medidas, decidimos hacer la experiencia al aire libre y obtener las fotos a la máxima distancia para reducir el paralaje, conseguir un compromiso con la luminosidad de la imagen y aplicar un zoom para precisar las medidas. Recogíamos distintos caudales a distintas alturas en una cubeta grande, para unos tiempos en torno a los 5". A efectos de mejorar las fotografías de los chorros, decidimos teñir el agua, en un primer ensayo de amarillo y después con azul de metileno. El volumen de agua que salía por el tubo de sección 8mm recogida en la cubeta se medía después con un vaso de precipitados, probeta y jeringuillas. Lo más difícil era mantener al mismo nivel la superficie de agua de la garrafa mientras que el agua salía por el orificio, acción que conseguíamos echando agua con un vaso grande de precipitados sobre la garrafa a un ritmo constante.

La sincronización de las acciones y registro de los resultados, supuso un trabajo duro de acoplamiento del equipo, al final resuelto. Un alumno controlaba la salida de los caudales, otro daba las órdenes para el cronometraje y otro registraba y grababa los valores. A continuación, el volumen del agua recogida en la cubeta se medía con la máxima precisión mediante una probeta y jeringuillas. Evidentemente, muchos registros fueron erróneos y hubo que repetirlos.



Las medidas de caudales (sin cálculo de errores) en cada cota frente a la sección se registraron en la hoja Excel adjunta. Incluimos también la recta de regresión lineal.

Altura (m)	Sección (m2)	Volumen (L)	Tiempo (s)	Caudal m3/s	V real =Q/S ( m/s)
0,175	5,50E-05	0,586	5,27	1,11E-04	2,20E+00
0,145	5,50E-05	0,423	5,01	8,44E-05	1,54E+00
0,115	5,50E-05	0,339	4,98	6,81E-05	1,24E+00
0,085	5,50E-05	0,326	4,98	6,55E-05	1,19E+00
0,055	5,50E-05	0,275	5,03	5,47E-05	9,94E-01
0,025	5,50E-05	0,167	5,21	3,21E-05	5,80E-01



De la gráfica es difícil obtener la ley matemática. Aunque es lógico que los rozamientos den lugar a rectas de pendientes distintas, no lo es tanto la dispersión de las medidas.

### 2.2.4.- Las velocidades dadas por Torricelli

Recordemos la velocidad de salida de un líquido coincide con la de caída libre de un móvil dejado caer desde la misma altura

$$v^2 = 2 \cdot g \cdot h$$

Hicimos cinco orificios a las cotas de 2.5, 5.5, 8.5, 11.5, 14.5 y 17.5 cm y procedimos a medir la velocidad prevista por Torricelli frente las obtenidas midiendo los caudales por la sección de la jeringuilla de 8,5 mm. Las velocidades en m/s aparecen en el recorte de la tabla.

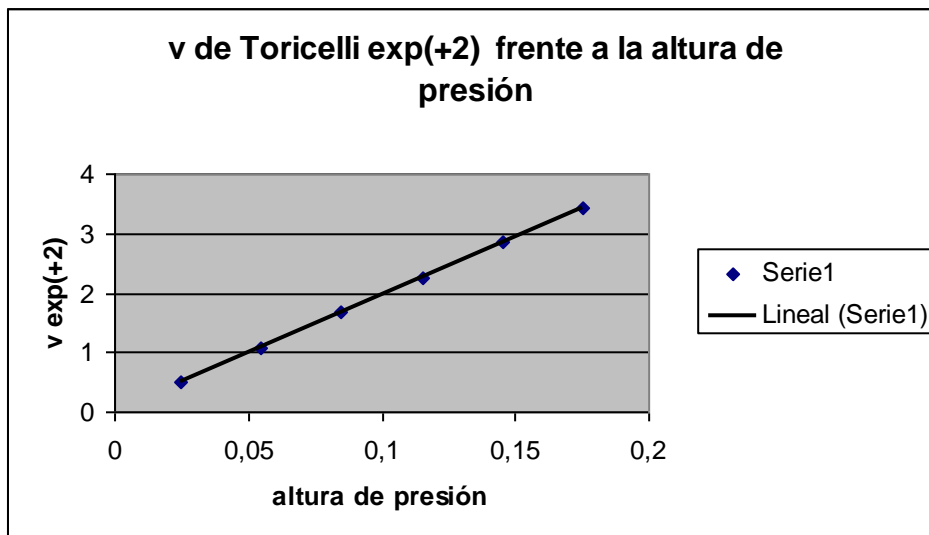
Altura (m)	V. Torricelli( m/s)
0,175	1,85E+00
0,145	1,69E+00
0,115	1,50E+00
0,085	1,29E+00
0,055	1,04E+00
0,025	7,00E-01

El análisis de las columnas velocidad teórica frente a velocidad real, nos muestra que las velocidades medidas por caudales son menores que las calculadas por Torricelli excepto en el primer valor, achacable a lo difícil del proceso de intentar mantener constante el nivel del agua durante la recogida rellenando el depósito constantemente. No tuvimos tiempo de repetir las medidas (estábamos en vacaciones de Navidad) pero ya sabemos que del análisis de errores se deciden nuevos métodos y mediciones, como es en realidad el trabajo científico experimental.

Altura (m)	V. Torricelli	V real =Q/S ( m/s)
0,175	1,85E+00	2,20E+00
0,145	1,69E+00	1,54E+00
0,115	1,50E+00	1,24E+00
0,085	1,29E+00	1,19E+00
0,055	1,04E+00	9,94E-01
0,025	7,00E-01	5,80E-01

De la fórmula de Torricelli se deduce que la relación  $v^2$  frente a altura  $h$  debe ser lineal. De la misma hoja, gracias a la posibilidad de dibujar la recta de tendencia de una serie estadística, obtenemos que la pendiente de la gráfica de Torricelli es el valor esperado

$$m = \frac{1}{2} g = 4,9 \text{ m/s}^2$$



## 2.3.-LA SEGUNDA FASE

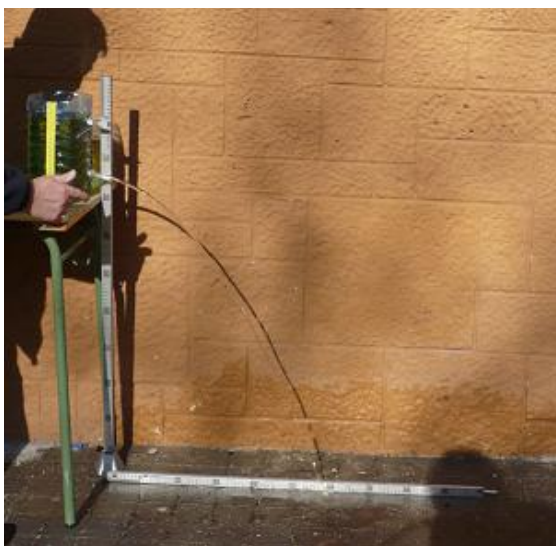
### ¿SE MANTIENE CONSTANTE LA VELOCIDAD DE SALIDA DURANTE EL TRAMO PARABÓLICO?

#### 2.3.1.-Diseño, estudio de literatura e hipótesis de partida de la investigación:

Unas primeras consideraciones nos hicieron suponer que al ser tan pequeño el tiempo de viaje del chorro, el alcance horizontal sería igual al previsto por un tiro parabólico cuya componente horizontal de velocidad fuera la de salida calculada por los caudales. Algo que parecía trivial resultó ser, como veremos, lo más sorprendente de la investigación

No encontramos ninguna literatura al respecto por lo que pensamos que, aunque, ciencia menor, era un tema inédito para investigar. Teníamos dos formas de encarar el problema:

- a) A partir de las fotos de cada chorro, conocida la velocidad real de salida por el método de los caudales, midiendo en la foto el alcance horizontal y la cota de salida mediríamos la velocidad media en el tramo externo y podríamos comparar el alcance real con el teórico. Suponíamos que debido a los rozamientos, el alcance obtenido sería menor que el calculado de la expresión de la velocidad por el caudal. La influencia de la viscosidad era un factor que no sabíamos ponderar.



- b) A partir de las películas del chorro, detener las imágenes consecutivas, medir posiciones del chorro en cada instante, tiempo entre dos imágenes (y por tanto entre las posiciones) y a partir de ahí calcular velocidades horizontales. Sería un análisis mucho más exacto y elegante.

### 2.3.2.-Los materiales, los montajes y los resultados

a) Las medidas a partir de las fotos:

Dentro del margen de error de las medidas podemos abstraer la ley de que el alcance horizontal medido es menor que el supuesto a partir de una velocidad horizontal de salida igual a la obtenida por el caudal. Por tanto los rozamientos frenan el alcance teórico pero como la compresión de sección de la vena va disminuyendo hasta su ruptura en gotas, se solapa otro fenómeno (perceptible en las imágenes del software) que la velocidad horizontal va creciendo a medida que el chorro avance. Es un fenómeno que requiere atención del jurado. El detalle de los puntos marcados se retrasa levemente frente a la trayectoria en la imagen final, aunque estén bien marcados en cada una de las imágenes previas inmobilizadas. Pensamos que somos originales en esta observación, y la única explicación plausible es que a medida que avanza el tiempo y cada sección del chorro gana velocidad, los puentes de hidrógeno arrastran a las secciones que quedan detrás, y éstos también aumentan su cota. Cuando el chorro se rompe en gotas, desaparece esta atracción y los puntos se superponen a la trayectoria.

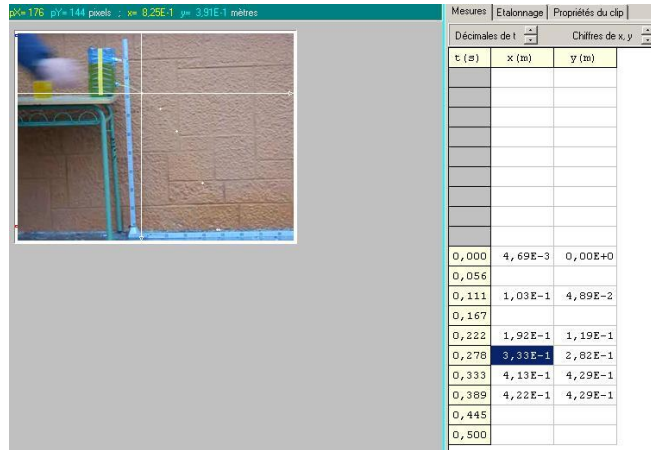


Otro fenómeno aún de más difícil explicación es el percibido en las fotos detenidas. Una porción de la vena que el momento inicial sale con poca velocidad, se descuelga progresivamente de la cabeza de la trayectoria parabólica. En los instantes sucesivos, esta porción, convertida ya en gotas, se desliga totalmente.

VELOCIDADES MEDIAS EN ALCANCE FRENTE A VEL REALES DE CAUDAL					
Altura de presión $\Delta h$ (m)	alcance leído x(m)	altura de caída y (cm)	tiempo de vuelo	v. media horizontal (m/s)	v. real ( de caudal) m/s
17,5	0,62	0,83	0,42	1,48E+00	2,2
11,5	0,5	0,83	0,42	1,19E+00	1,24
8,5	0,4	0,83	0,42	9,52E-01	1,19
2,5	0,25	0,83	0,42	5,95E-01	0,58

b) A partir de las películas y medidas con el software

Tras varios ensayos con la selección de planos, color de fondo y colorante amarillo, nos quedamos con la tinción con metileno. Con ella los fotogramas obtenidos a intervalos de 1/18 segundos, dieron un detalle suficiente para las medidas. El jurado tiene la posibilidad de ampliar las imágenes tras su extracción del video, ya en formato JPEG. Los datos obtenidos de la tabla adjunta a la imagen nos permiten calcular velocidades instantáneas (casi) y medias con bastante precisión.



t (s)	x (m)	y (m)
0,000	4,69E-3	0,00E+0
0,056		
0,111	1,03E-1	4,89E-2
0,167		
0,222	1,92E-1	1,19E-1
0,278	3,33E-1	2,82E-1
0,333	4,13E-1	4,29E-1
0,389	4,22E-1	4,29E-1
0,445		
0,500		





Para ilustrar la potencia del método exponemos los resultados Excel exportados desde Avimeca a Excel cuando la altura de caída es máxima:

Velocidad media del chorro para $\Delta h = 17,5$ cm					
t (s)	$\Delta t$ (s)	x (m)	$\Delta x$ (m)	y (m)	V media (m/s)
0		1,39E-02		1,19E-02	1,49E+00
0,056	0,056	7,89E-02	6,50E-02	3,57E-02	
0,111	0,055	1,69E-01	9,01E-02	9,52E-02	
0,167	0,056	2,32E-01	6,30E-02	1,48E-01	
0,222	0,055	3,34E-01	1,02E-01	2,76E-01	
0,278	0,056	4,27E-01	9,30E-02	4,07E-01	
0,333	0,055	4,85E-01	5,80E-02	5,10E-01	
0,389	0,056	5,75E-01	9,00E-02	6,62E-01	
0,445	0,056	6,63E-01	8,80E-02	8,45E-01	

### 2.3.3.-Las conclusiones

Fuera del recipiente aparecen nuevas variables poco controladas (viscosidad, tensión superficial, gravedad,...), lo que nos hace descartar el uso de las medidas del alcance horizontal para el cálculo y el uso indirecto de la velocidad de salida del recipiente. Por tanto tras nuestra metodología y nuestras medidas, podemos asegurar que la única medida fiable de la velocidad de salida es la obtenida a partir de la medida de los caudales que salen del orificio. Nuestro desconocimiento inicial acerca de las precisiones de las medidas nos hizo olvidar la necesidad de un recipiente de volumen y sección mucho mayores.

A falta de medidas más finas, podemos enunciar que a la salida, la velocidad media horizontal es levemente menor que la velocidad a la salida del tubo medida a partir de los caudales y la sección, debido a la fricción de la vena contra el aire. Este fenómeno solapa con otro simultáneo debido al estrechamiento de la vena que incrementa levemente la velocidad en los instantes iniciales, hasta que el chorro ya se convierte en gotas.

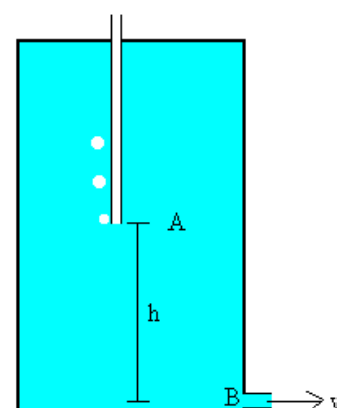
Estas complicaciones sucesivas surgidas del intento de profundizar en la explicación de los fenómenos nos hacen recordar la frase de Feynman de que si pudiéramos entender todo lo que sucede en un vaso de vino, entenderíamos todo lo que ocurre en el Universo. No hemos llegado a tanto pero sí a los niveles de los primeros cursos universitarios. Pensamos no obstante que este tema merece por la profundidad y originalidad de nuestro estudio su publicación en alguna revista científica escolar (Physics Teacher, Alambique, Sección de enseñanza de la RESEF, etc...).

## 3.-LA INVESTIGACIÓN (II): EL TUBO DE MARIOTTE

Tratamos de repetir en un centro escolar la experiencia del tubo de Mariotte a partir de un material de fácil adquisición y de bajo coste. La construcción la hizo el equipo. Los gráficos en Paint los realizó un alumno del grupo modificando un dibujo inicial de Internet

### 3.1.- Los fundamentos teóricos

El Frasco de Mariotte es un caso particular, curioso y muy impactante del Teorema de Torricelli. En principio es un frasco, cerrado en la parte superior excepto por un tubo abierto en ambos extremos. Según comienza el descenso de la columna, la parte superior del frasco queda en vacío e inmediatamente aparecen burbujas de aire procedentes del tubo que llenan la parte superior de la columna. A efectos de la velocidad de salida, ésta se mantiene constante con una altura efectiva  $h$ . El fenómeno continuará hasta que el nivel de agua llegue al punto A.



La ecuación es la de Torricelli, puesto que nos encontramos en el mismo caso de A y B, solo que esta vez el punto A estará “dentro” de la columna de líquido y no descenderá hasta que el nivel del agua haya pasado la abertura inferior del tubo, momento en que se comportará como el frasco de Torricelli “normal”.

### 3.2 Materiales, montaje y procedimiento

Los materiales los adquirimos en una conocida tienda de plásticos de Madrid, en ferreterías y en farmacias.

- Tubo y tapas de metacrilato de 5 cm de sección.
- Pegamento especial de plásticos
- Varilla de vidrio hueca de 3 mm de sección
- Jeringuilla de 2,5 ml
- Tuercas y juntas
- Plastilina



A falta de medidas y grabaciones, nuestra experiencia se limitó a comprobar lo previsto en la teoría: la velocidad de caída se mantenía constante hasta llegar al nivel al que se encontraba la varilla en su parte interna. A partir de este momento, las velocidades venían regidas por la aproximación de Torricelli.

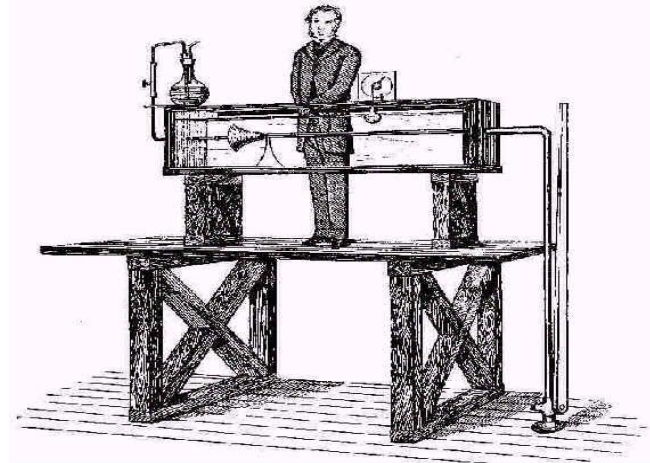


## 4.-LA INVESTIGACIÓN (III): FLUJOS LAMINAR Y TURBULENTO

### 4.1.- Los fundamentos teóricos:

El Número de Reynolds es el número adimensional que señala el paso de flujo turbulento a laminar. Viene dado por la ecuación

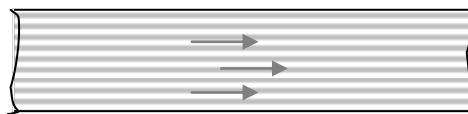
$$Re = \frac{V \cdot D}{\nu},$$



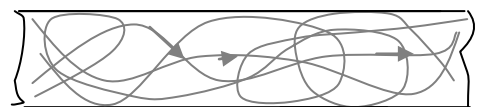
Experiencia histórica de Reynolds

donde “Re” es el Número de Reynolds, “D” el diámetro de la tubería y “ $\nu$ ” la viscosidad cinemática del fluido. Se comprueba que si el número resultante es igual o mayor de 4000; el flujo será turbulento, y si es menor de 2000: laminar. El margen entre 4000 y 2000 es el periodo de cambio del flujo.

Pero, ¿qué es el flujo laminar?, y ¿el turbulento? El flujo laminar es aquel en el que el fluido se desplaza en capas o láminas debido a que la velocidad es reducida y no entra en “conflicto” con la viscosidad (o resistencia interna). En el flujo turbulento en cambio la velocidad es mayor y la viscosidad hace que las partículas se desplazan de manera caótica.



Flujo laminar



Flujo turbulento

## 4.2.- Materiales y procedimientos

Para esta investigación tuvimos una imprevisión inicial de su dificultad técnica y una escasez de medios, lo que no nos permitió llegar siquiera a la visualización del fenómeno.

Utilizamos:

- El tubo de metacrilato de diámetro 5 cm abierto por un extremo.
- Una vía de hospital con aguja, regulador y depósito superior.
- Base soporte con nuez.
- Colorante amarillo



Nuestro montaje

## 4.3.- Los resultados

Aquí nuestra experiencia resultó fallida. El tubo de metacrilato era demasiado estrecho para que se observara la vena líquida estrecha teñida, y el tubo de la vía demasiado ancho por lo que el colorante se vaciaba de inmediato y no observamos nada significativo. Una aguja hipodérmica con una vena muy estrecha y pequeño caudal para seguir el flujo teñido hubiera sido ideal. Si somos seleccionados, mejoraremos el diseño a partir de una cubeta bastante mayor.

## 5.-LAS CUESTIONES PROPUESTAS

### **Botella más ancha:**

Si la botella o, lo que es lo mismo, la sección de A fuera mayor, la velocidad se reduciría. Tal y como hemos indicado se indica en el apartado de la variación del diámetro.

### **Tubo de salida más ancho:**

Si el tubo de salida, o la sección de B, fueran más anchos, la velocidad de salida aumentaría, también indicado en el apartado de la variación del diámetro. Hecha la experiencia con una botella de plástico, se confirmó nuestra previsión.

### **Experimento en la Luna:**

Si el experimento se realizara en la Luna obviamente la velocidad sería menor, pues la gravedad lunar es mucho menor que la terrestre:

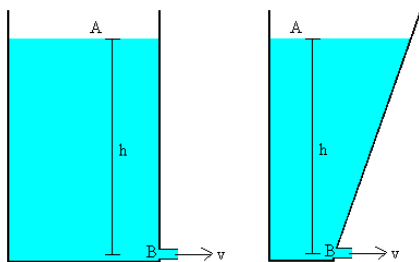
$$v_T = \sqrt{2g_T h}$$

$$v_L = \sqrt{2g_L h}$$

$$\text{Si } g_T > g_L \Rightarrow v_T > v_L$$

### **Pared inclinada:**

Si la pared del depósito fuera inclinada, pero la distancia entre el tubo de salida y la superficie del líquido fuera la misma la velocidad no cambiaría puesto que según el principio de la Hidrostática, la presión en todos los puntos a una misma altura es constante y ello condiciona la velocidad de salida.



$$p_A - p_B = dg(h_A - h_B)$$

Como sabemos, la presión en cualquier punto del líquido, independientemente de la orientación de la superficie, sólo depende de la cota de agua hasta el nivel de la superficie. En ambos casos el orificio se encuentra bajo la misma columna líquida, la presión que soportan es la misma y por tanto la velocidad será igual según Torricelli

$$v_1 = v_2 = \sqrt{2gh}$$

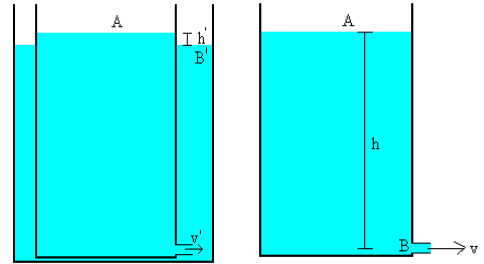
**Orificio sumergido:**

si el orificio estuviera sumergido en un líquido con la misma densidad que el del depósito la velocidad habría de ser calculada con la diferencia de alturas entre las superficies de los líquidos, pues para que las presiones siguieran siendo iguales el punto B ha de ascender hasta la superficie del depósito grande, con lo que la velocidad disminuiría.

$$V = 2 \cdot g \cdot h$$

$$V' = 2 \cdot g \cdot h'$$

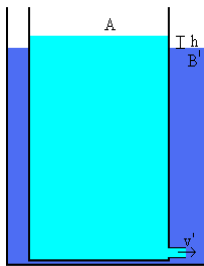
*Si  $h > h' \Rightarrow 2 \cdot g \cdot h > 2 \cdot g \cdot h' \Rightarrow V > V'$*



Si la densidad del líquido en el que se sumerge el depósito es mayor; la velocidad de salida disminuiría, y si es menor; la velocidad aumentaría respecto del caso con la misma densidad (en las demostraciones siguientes hemos de tener en cuenta que ni las presiones ni las alturas varían y que las velocidades en el punto A siguen siendo despreciables):

$$\frac{V_A^2 \cdot d_A}{2} + P_A + d_A \cdot g \cdot h_A = \frac{V_B^2 \cdot d_B}{2} + P_B + d_B \cdot g \cdot h_B \Rightarrow V_B^2 \cdot d_B = 2 \cdot d_A \cdot g \cdot h_A - 2 \cdot d_B \cdot g \cdot h_B$$

$$\frac{V_A^2 \cdot d_A}{2} + P_A + d_A \cdot g \cdot h_A = \frac{V_{B'}^2 \cdot d_{B'}}{2} + P_B + d_{B'} \cdot g \cdot h_{B'} \Rightarrow V_{B'}^2 \cdot d_{B'} = 2 \cdot d_A \cdot g \cdot h_A - 2 \cdot d_{B'} \cdot g \cdot h_{B'}$$



$$V_B^2 = \frac{2 \cdot d_A \cdot g \cdot h_A - 2 \cdot d_B \cdot g \cdot h_B}{d_B}$$

$$V_{B'}^2 = \frac{2 \cdot d_A \cdot g \cdot h_A - 2 \cdot d_{B'} \cdot g \cdot h_{B'}}{d_{B'}}$$

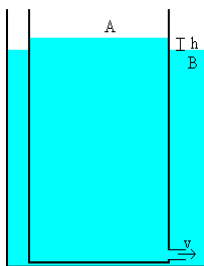
*Si  $d_B < d_{B'} \Rightarrow$*

$$\Rightarrow 2 \cdot d_B \cdot g \cdot h_B < 2 \cdot d_{B'} \cdot g \cdot h_{B'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot d_A \cdot g \cdot h_A - 2 \cdot d_B \cdot g \cdot h_B > 2 \cdot d_A \cdot g \cdot h_A - 2 \cdot d_{B'} \cdot g \cdot h_{B'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot d_A \cdot g \cdot h_A - 2 \cdot d_B \cdot g \cdot h_B}{d_B} > \frac{2 \cdot d_A \cdot g \cdot h_A - 2 \cdot d_{B'} \cdot g \cdot h_{B'}}{d_{B'}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_B^2 > V_{B'}^2$$



Caso con una densidad mayor

$$V_B^2 = \frac{2 \cdot d_A \cdot g \cdot h_A - 2 \cdot d_B \cdot g \cdot h_B}{d_B}$$

$$V_{B'}^2 = \frac{2 \cdot d_A \cdot g \cdot h_A - 2 \cdot d_{B'} \cdot g \cdot h_B}{d_{B'}}$$

$$\text{Si } d_B > d_{B'} \Rightarrow$$

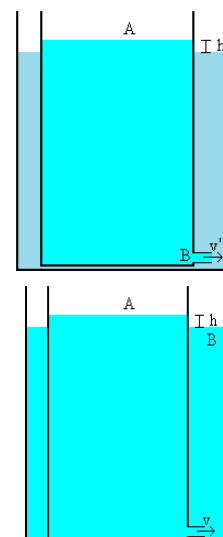
$$\Rightarrow 2 \cdot d_B \cdot g \cdot h_B > 2 \cdot d_{B'} \cdot g \cdot h_{B'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 \cdot d_A \cdot g \cdot h_A - 2 \cdot d_B \cdot g \cdot h_B < 2 \cdot d_A \cdot g \cdot h_A - 2 \cdot d_{B'} \cdot g \cdot h_{B'} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{2 \cdot d_A \cdot g \cdot h_A - 2 \cdot d_B \cdot g \cdot h_B}{d_B} < \frac{2 \cdot d_A \cdot g \cdot h_A - 2 \cdot d_{B'} \cdot g \cdot h_{B'}}{d_{B'}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_B^2 < V_{B'}^2$$

Caso con una densidad menor



En todo lo anterior se presupone que la superficie del líquido en el que se sumerge todo el montaje no supera a la del fluido del interior del depósito, puesto que si no, el líquido externo sería el desplazado.

## 6.-LA BIBLIOGRAFÍA

<http://www.sc.ehu.es/sbweb/fisica/fluidos/dinamica/bernoulli/bernouilli.htm>

<http://www.youtube.com/watch?v=6LOgdOfFAbI>

<http://www.youtube.com/watch?v=ZlCwqSWtxhc>

SEARS, F. (2004). Física Universitaria. *Prentice Hall. Mexico*

TIPPLER P. (2005). Física para la Ciencia y la Tecnología. *Reverté. Barcelona*

HUGHES F. (2009) .Schaum's Outline of Fluid Dynamics. *Mc Graw Hill*

## 7.-MATERIAL DE APOYO

Hemos elaborado unos videos ilustrativos y fotos que por su gran peso no podemos enviar por e-mail. Adjuntamos en correo adjunto los “links” que envían hacia sus lugares almacenados.

<http://www.megaupload.com/?d=SAHBXX2N>